Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
12.05.2005
Blatt 05

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $Y \in \mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ die Spuralgebra von $\mathcal{A}$ auf Y (vgl. Aufgabe 3, Blatt 4). Sei $\nu := \mu \mid \mathcal{B}$. Zeigen Sie: ν ist ein Maß auf $\mathcal{B}$ und für jede $\mathcal{A}$-messbare Funktion $f\colon \to [0, \infty]$ ist die Einschränkung $f \mid Y\colon Y \to [0, \infty]$ $\mathcal{B}$-messbar und es gilt:
$$\int f \mid Y \, d\nu = \int f \chi_Y \, d\mu \quad (=: \int_Y f \, d\mu)$$

2. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra von $\mathbf{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig (klein). Geben Sie eine offene Menge $U \subseteq \mathbf{R}$ an, die $\mathbf{Q}$ enthält und deren Maß $\lambda(U)$ kleiner als ε ist.

3. Die *Cantormenge* $C \subseteq [0, 1]$ entsteht iterativ so: Im ersten Schritt nimmt man aus $C_0 := [0, 1]$ das mittlere Drittel heraus, $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Im zweiten Schritt nimmt man aus den verbleibenden zwei Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum das jeweils mittlere Drittel heraus, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Bei jedem weiteren Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen jeweils wieder das mittlere Drittel heraus und erhält im n-ten Schritt C_n. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n \in \mathbf{N}} C_n$.
   (a) Man zeige, dass C eine Borelmenge und $\lambda(C) = 0$ ist (Hinweis: Schrumpfungsformel aus Aufgabe 3, Blatt 1).
   (b) Man zeige, dass C überabzählbar ist. (Hinweis: Man beschreibe alle Zahlen in $[0, 1]$ im triadischen System.)

Abgabe: Dienstag, 24. Mai 2005, 10.15 Uhr (!)