Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
19.05.2005
Blatt 06

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Sei (X, μ) ein Maßraum, $I \subseteq \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon X \times I \to \mathbf{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $t \in I$ die Einschränkung $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar ist und für jedes $x \in X$ die Einschränkung $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar ist. Es gebe außerdem ein integrierbares $g\colon X \to [0, \infty]$, so daß $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$ für alle $t \in I$ und alle $x \in X$ ist. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $I \to \mathbf{R}$, $t \mapsto \int f(x,t)\, d\mu$ differenzierbar ist, $X \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ für jedes t integrierbar ist und für alle $t \in I$ gilt:
$$\frac{d}{dt} \int f(x,t)\, d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, d\mu.$$
(Hinweis: Für $t \in I$ sei (h_n) eine Nullfolge, so dass $t + h_n \in I$ ist für alle $n \in \mathbf{N}$. Benutzen Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, um eine Majorante für die Funktionen $g_n\colon X \to \mathbf{R}$, $g_n(x) = \frac{1}{h_n}(f(x, t+h_n) - f(x))$ zu finden.)

2. Sei $X = \mathbf{N}$, $\alpha = (\alpha_n)$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen und $\mu_\alpha\colon \mathcal{P}(\mathbf{N}) \to [0, \infty]$ das Maß, welches $\mu_\alpha(\{n\}) = \alpha_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$ erfüllt.
   (a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $x_n := f(n)$, messbar ist und für eine nicht-negative Folge $f = (x_n)$ gilt:
   $$\int f\, d\mu_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$
   (b) Zeigen Sie, dass für α mit $\alpha_n = 1/n^3$ und der Folge $f = (x_n)$ mit $x_n = n$ zwar f μ_α-integrierbar, nicht aber $f^2 = (x_n^2)$ μ_α-integrierbar ist.

3. Sei $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| = 1\}$ die Einheitskreislinie und $\pi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$, $\pi(t) = e^{it}$. Sei weiter $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S^1)$ die Borel-Algebra auf S^1 und $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ gegeben durch $\mu(B) = \frac{1}{2\pi}\lambda(\pi^{-1}(B) \cap [0, 2\pi])$, wo λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra von $\mathbf{R}$ sei. Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbf{S}^1 \to [0, \infty]$ messbar, so ist $f \circ \pi$ 2π-periodisch und messbar und es gilt:
$$\int f\, d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f \circ \pi\, d\lambda.$$

Abgabe: Dienstag, 31. Mai 2005, 10.15 Uhr (!)