Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
31.05.2005
Blatt 07

Übungen zu
„Mathematik für Physiker IV“

1. Sei $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Ein maximales Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ in X heißt eine *Basis* von X.

   Sei nun $X = l^2(\mathbf{Z}, \mathbf{C})$ der Hilbertraum der quadrat-summierbaren Folgen $(x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ und $e_n \in X$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Folge, die an der n-ten Stelle eine Eins und sonst nur Nullen hat $(n \in \mathbf{Z})$. Zeigen Sie, dass $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Basis von X ist.

2. Sei $\mathbf{S}^1 \subseteq \mathbf{C}$ die Einheitskreislinie, $\pi: \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$, $t \mapsto e^{it}$ und $X = L^2(S^1, \mathbf{C})$ der Hilbertraum der quadrat-integrierbaren Funktionen (bzgl. des Maßes von Aufgabe 3, Blatt 6). Zeigen Sie, dass es für die Funktionen $f_n: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $e_n(t) = e^{int}$ $(n \in \mathbf{N})$ eindeutig bestimmte Elemente $e_n \in X$ gibt mit $f_n = e_n \circ \pi$ und zeigen Sie, dass $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ein Orthonormalsystem für X ist.

3. Sei (X, μ) ein Maßraum und $f: X \to \mathbf{R}$ eine messbare Funktion. Es heißt f *wesentlich beschränkt*, wenn es ein $c \geq 0$ gibt, so dass $N = \{x \in X : |f(x)| > c\}$ eine Nullmenge ist. Man notiert dann mit $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ die Menge aller wesentlich beschränkten, messbaren Funktionen auf X und definiert schließlich $|| \cdot ||_\infty: \mathcal{L}^\infty \to [0, \infty)$ durch

   $$||f||_\infty := \inf\{c \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > c\}) = 0\}$$

   das *wesentliche Supremum* von f.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ein $\mathbf{R}$-Vektorraum ist und $|| \cdot ||_\infty$ auf $L^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$ eine Norm definiert (wo $\mathcal{N}(\mu)$ den Unterraum der messbaren Funktionen bezeichnet, die fast-überall gleich Null sind).

   (b) Zeigen Sie, dass $(L^\infty(\mu), ||\cdot||_\infty)$ sogar ein Banachraum ist. (Hinweis: Für eine Cauchy-Folge (f_n) in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ betrachten Sie nur die $x \in X$, wo $|f_n(x)| \leq ||f_n||_\infty$ und $|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||$, für alle $n, m \in \mathbf{N}$, ist.)

Abgabe: Dienstag, 7. Juni 2005, 10.15 Uhr