Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
07.06.2005
Blatt 08

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borelalgebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R})$ und μ das Zählmaß auf der vollen Potenzalgebra $\mathcal{P}$ von $\mathbf{R}$. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta = \{(x, y) : x = y\}$ in $\mathcal{B} \otimes \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbf{R}^2)$ liegt, und es gilt:

$$\int \lambda(\Delta_y)\, d\mu \neq \int \mu(\Delta_x)\, d\lambda.$$

2. (a) Sei $K \subseteq \mathbf{R}^3$ ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und einer Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalieris Prinzip das Volumen von K.

   (b) Sei $f\colon [a, b] \to (0, \infty)$, $x \mapsto f(x)$ eine stetige Funktion und $K \subseteq \mathbf{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotiert. Zeigen Sie, dass für das Borel-Lebesgue-Maß λ von K gilt:

$$\lambda(K) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

3. Sei (X, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $f\colon X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Sei λ das Borel-Lebesgue-Maß auf $[0, \infty]$ und $\mu \otimes \lambda$ das Produktmaß auf $X \times [0, \infty]$. Zeigen Sie, dass der *Subgraph von* f, d.i.

$$G_f = \{(x, t) \mid 0 \leq t < f(x)\} \subseteq X \times [0, \infty],$$

eine messbare Menge ist und es gilt: $\int f\, d\mu = (\mu \otimes \lambda)(G_f)$. (Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für Treppenfunktionen und benutzen Sie dann Levis Satz bzw. die Ausschöpfungsformel für Maße.)

Abgabe: Dienstag, 14. Juni 2005, 10.15 Uhr