Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
14.06.2005
Blatt 09

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Berechnen Sie das Volumen eines Volltorus' (d. i. das Innere eines Schwimmreifens) mit den Radien $0 < r < R$. (Hinweis: Aufgabe 2, Blatt 8)

2. Die *Gamma-Funktion* wird definiert durch $\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$,
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$
   (a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral wirklich existiert und die folgende Funktionalgleichung für alle $x \in (0,\infty)$ erfüllt:
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
   (b) Berechnen Sie $\Gamma(1)$ und damit dann mit Hilfe von Teil (a): $\Gamma(n) = (n-1)!$, für alle $n \in \mathbf{N}$. (Die Gamma-Funktion *interpoliert* daher (bis auf eine Verschiebung um 1) *die Fakultät*.)

   (c) Berechnen Sie $\Gamma(\frac{1}{2})$ und dann mit (a) und (b), dass für das Volumen ω_n der n-dimensionalen Einheitskugel für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:
$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

3. *Der Schwerpunkt* $S = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbf{R}^3$ eines (kompakten) Körpers $K \subseteq \mathbf{R}^3$ ist definiert durch
$$s_j = \frac{1}{\lambda(K)} \int_K x_j\, dx$$
($j = 1,2,3$), wo $\lambda(K)$ das Volumen von K bezeichnet. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Halbkugel $\mathbf{B}^+ = \{x \in \mathbf{B}^3 : x_3 \geq 0\}$.

Abgabe: Dienstag, 21. Juni 2005, 10.15 Uhr