Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
21.06.2005
Blatt 10

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV“

1. Sei $G = (0,1) \times (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \subseteq \mathbf{R}^3$ und $\Phi\colon G \to \mathbf{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \cos\theta, r \sin\varphi \cos\theta, r \sin\theta).$$

   (a) Berechnen Sie die Jacobische $J_\Phi\colon G \to (0, \infty)$ und zeigen Sie, dass Φ ein Diffeomorphismus von G auf sein Bild $D := \Phi(G)$ ist.

   (b) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Transformationsformel das Volumen der Kugelschale $(0 \le r \le R \le 1)$

$$A = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid r \le |x| \le R\}.$$

2. Sei $\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$. Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die folgenden Integrale:

$$I = \int_\Delta e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy, \qquad J = \int_0^\infty e^{-t^2}\, dt.$$

   (Hinweis: $(2J)^2 = \int_{\mathbf{R}^2} \exp(-x^2 - y^2)\, dxdy$)

3. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf der Menge X und $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf der Menge Y. Sei weiter $\Phi\colon Y \to X$ bijektiv und derart, dass $B \in \mathcal{B}$ ist, genau wenn $\Phi(B) \in \mathcal{A}$ ist. Ist nun μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so bezeichne $\nu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$ das Bildmaß von μ unter Φ^{-1}.

   (a) Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon X \to \mathbf{R}$ genau dann $\mathcal{A}$-messbar ist, wenn $g\colon Y \to \mathbf{R}$, $g = f \circ \Phi$, $\mathcal{B}$-messbar ist.

   (b) Beweisen Sie die *allgemeine Transformationsformel*: Ist $f\colon X \to \mathbf{R}$ μ-integrierbar, so ist auch $g\colon Y \to \mathbf{R}$, $g = f \circ \Phi$, ν-integrierbar und es gilt:

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\nu.$$

Abgabe: Dienstag, 28. Juni 2005, 10.15 Uhr