Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
05.07.2005
Blatt 12

Übungen zu „Mathematik für Physiker IV"

1. (a) Zeigen Sie, dass das *zweischalige Hyperboloid* $M \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche des $\mathbf{R}^{n+1}$ ist,
$$M = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = 1\}.$$
   (b) Zeigen Sie, dass der Kegel $K \subseteq \mathbf{R}^3$ keine Untermannigfaltigkeit (der Dimension 2) im $\mathbf{R}^3$ ist,
$$K = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}.$$

2. (a) Zeigen Sie, dass das Ellipsoid
$$K = \{\frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + \frac{x_3^2}{9} \leq 1\}$$
ein Kompaktum mit glattem Rand ist.
   (b) Berechnen Sie das äußere Einheits-Normalenfeld an K.

3. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \mid A^t A = \mathbf{1}\}$$
eine kompakte $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ ist wie folgt:

   (a) Betrachten Sie $F\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) : A^t = A\}$, $A \mapsto A^t A - \mathbf{1}$ und zeigen Sie, dass für das Differential $DF(A)\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ gilt:
$$DF(A)(B) = A^t B + B^t A.$$

   (b) Für $A \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) = F^{-1}(0)$ zeigen Sie, dass $DF(A)$ surjektiv ist und schließen Sie daraus die Behauptung.

Abgabe: Dienstag, 12. Juli 2005, 10.15 Uhr