Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
12.07.2005

# Klausur zu „Mathematik für Physiker IV“

**Klausur-Nr.:**

**Name, Vorname:**

**Geburtsdatum:**

**Matrikel-Nr.:**

1. Sei $\lambda$ das Borel-Lebesguesche Maß auf (der Borel-Algebra von) $\mathbf{R}^n$. Zeigen Sie:
   (a) Ist $U \subseteq \mathbf{R}^n$ offen und nicht leer, so gilt: $\lambda(U) > 0$.
   (b) Ist $K \subseteq \mathbf{R}^n$ kompakt, so gilt: $\lambda(K) < \infty$.

2. (a) Sei $H$ ein $\mathbf{R}$-Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt und $\| \cdot \|$ die induzierte Norm auf $H$ (also $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ für alle $f \in H$). Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|$ *die Parallelogrammregel* erfüllt, d. h. für alle $f, g \in H$ gilt:
   $$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$
   (b) Sei $\lambda$ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbf{R}$ und $H = L^1(\lambda)$ der Raum der $\lambda$-integrierbaren Funktionen auf $\mathbf{R}$. Zeigen Sie, dass die Norm auf $H$ (nämlich $\|f\| = \int |f| \, d\lambda$, $f \in H$) *nicht* von einem Skalarprodukt auf $H$ kommt.

3. Sei $\Delta \subseteq \mathbf{R}^2$ die Einheitskreisscheibe. Berechnen Sie das Integral
   $$\int_\Delta e^{x^2+y^2} \, dxdy$$

4. Wie groß ist der Anteil der Erdoberfläche, die sich zwischen dem 30. und 90. Grad nördlicher Breite befindet?