Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2005
19.10.2005

# Nachlausur zu „Mathematik für Physiker IV“

**Klausur-Nr.:**

**Name, Vorname:**

**Geburtsdatum:**

**Matrikel-Nr.:**

1. Sei $\lambda$ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbf{R}$.
   (a) Sei $N \subseteq \mathbf{R}$ eine Borelsche Nullmenge und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es dann eine offene Menge $I \subseteq \mathbf{R}$ mit $I \supseteq N$ gibt, so dass $\lambda(I) < \varepsilon$ ist.
   (b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Geben Sie explizit eine offene Menge $I \subseteq \mathbf{R}$ an, die die natürlichen Zahlen $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$ enthält und Maß kleiner als $\varepsilon$ hat, $\lambda(I) < \varepsilon$.

2. Sei $\lambda$ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbf{R}$.
   (a) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, die in $L^2(\lambda)$, nicht aber in $L^1(\lambda)$ liegt. Begründen Sie.
   (b) Geben Sie eine Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ an, die in $L^1(\lambda)$, nicht aber in $L^2(\lambda)$ liegt. Begründen Sie.

3. Sei $K \subseteq \mathbf{R}^3$ der Kegel über einer Kreisscheibe vom Radius $R > 0$ und Höhe $h > 0$. Zeigen Sie mit Cavalieris Prinzip, dass der Volumeninhalt von $K$ gerade $\frac{1}{3}\pi R^2 h$ beträgt. (Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass der Flächeninhalt einer Scheibe vom Radius $r > 0$ gerade $\pi r^2$ ist.)

4. Sei $H \subseteq \mathbf{R}^3$ die obere Hemisphäre, also $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 : z \geq 0\}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral
$$\int_H z \, dS$$