Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
26.04.2006
Blatt 01

Übungen zu “Differentialgeometrie II”

1. Sei K ein Körper. Eine Menge A zusammen mit drei Verknüpfungen $(+, \cdot, *)$ heißt *eine (kommutative) K-Algebra*, wenn $(A, +, *)$ ein (kommutativer) Ring und $(A, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist und für alle $a, b \in A$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\lambda \cdot (a * b) = (\lambda \cdot a) * b = a * (\lambda \cdot b).$$

Zeigen Sie nun: Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist $\mathcal{E}(M)$ (mit den natürlichen Verknüpfungen $+$, $\cdot$ und $*$ aus der Vorlesung) eine kommutative $\mathbf{R}$-Algebra.

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon \mathbf{R} \to [0, 1]$,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \leq 0 \\ \exp(-\frac{1-t}{t}) & \text{für} \quad 0 < t < 1 \\ 1 & \text{für} \quad 1 \leq t \end{cases},$$

glatt ist und dann, dass $\lambda\colon [0, \infty) \to [0, 1]$, $\lambda(t) = 1 - h(t - 1)$, eine Abschneidefunktion im Sinne der Vorlesung ist.

3. Sei $\pi\colon E \to M$ ein Vektorraumbündel vom Rang r. Zeigen Sie, dass E genau dann trivial ist (d.h. $E \cong \underline{\mathbf{R}}^r$), wenn $\Gamma(M; E) \cong \mathcal{E}(M)^r$ ist.

4. Eine glatte Mannigfaltigkeit heißt *parallelisierbar*, wenn ihr Tangentialbündel trivial ist. Zeigen Sie,

   (a) dass der Torus $\mathbf{T}^n$ (für jedes $n \in \mathbf{N}$) parallelisierbar ist;

   (b) dass die 2-Sphäre nicht parallelisierbar ist (Hinweis: Satz vom Igel).

Abgabe, Mittwoch 3. Mai 2006, 10.15 Uhr