Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
03.05.2006
Blatt 02

Übungen zu “Differentialgeometrie II”

1. (a) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt $\times\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ eine Lie-Klammer auf $\mathbf{R}^3$ definiert.

   (b) Sei A eine $\mathbf{R}$-Algebra. Zeigen Sie, dass durch

   $$[a, b] := ab - ba$$

   eine Lie-Klammer auf A definiert wird.

2. (a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbf{N}$

   $$L_n = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}) : \ A + A^t = 0\}$$

   eine Lie-Unterlagebra von $L = \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ ist. Welche Dimension hat L_n?

   (b) Zeigen Sie, dass L_3 isomorph zu $(\mathbf{R}^3, \times)$ ist.

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, X, Y seien glatte Vektorfelder und f, g seien glatte Funktionen auf M. Zeigen Sie:

   $$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

   (Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass beide Seiten als Derivationen auf den glatten Funktionen von M übereinstimmen.)

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$ und $p \in M$. Zeigen Sie, dass auch gilt:

   $$\dim_{\mathbf{R}} \mathcal{E}_p(M) = \infty.$$

Abgabe: Mittwoch 8. Mai 2006, 10.15 Uhr