Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
10.05.2006
Blatt 03

Übungen zu “Differentialgeometrie II”

1. Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Matrizenalgebra $L = \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ mit ihrer natürlichen Lie-Algebra-Struktur. Zeigen Sie, dass
$$L' = \{A \in L : \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$$
eine Lie-Unteralgebra von L ist. Welche Dimension hat L'?

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und ω eine 1-Form auf M. Zeigen Sie die folgende koordinatenfreie Beschreibung der Ableitung $d\omega$ von ω: Sind $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, so gilt:
$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$
(Cartan's Formel; Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $M = V$ mit einer offenen Menge $V \subseteq \mathbf{R}^n$ ist. Warum?)

3. Sei $\phi\colon M \to N$ eine glatte Abbildung, $\pi\colon F \to N$ ein Vektorraumbündel vom Rang r und $1 \leq k \leq r$.

   (a) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektorbündel über M kanonisch isomorph sind:
   $$(\Phi^*(F))^* \cong \Phi^*(F^*), \quad \Lambda^k(\Phi^*(F)) \cong \Phi^*(\Lambda^k F).$$

   (b) Sei $\omega \in \mathcal{E}^{(k)}(N)$ und $\Phi^\sharp(\omega) \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ ihr Rückzug. Für $D\Phi\colon TM \to \Phi^*TN$ bezeichne $D\Phi^*\colon (\Phi^*TN)^* \to TM^*$ ihr Dual und $\Lambda^k D\Phi^*\colon \Lambda^k(\Phi^*TN)^* \to \Lambda^k TM^*$ dessen k-faches Dachprodukt. Zeigen Sie:
   $$\Phi^\sharp(\omega) = \Lambda^k D\Phi^*(\Phi^*\omega)$$

4. Geben Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Beispiel einer glatten Abbildung $\Phi\colon M \to N$ an, so dass gilt:

   (a) $\Phi_*\colon \mathcal{X}(M) \to \Gamma(M, \Phi^*TN)$ ist nicht injektiv;

   (b) $\Phi_*\colon \mathcal{X}(M) \to \Gamma(M, \Phi^*TN)$ ist nicht surjektiv.

Abgabe: Mittwoch 17. Mai 2006, 10.15 Uhr