Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
17.05.2006
Blatt 04

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Sei ∇ eine covariante Ableitung auf einem Vektorraumbündel $\pi\colon E \to M$. Fasst man ∇ als $\mathbf{R}$-lineare Abbildung von $\Gamma(M;E)$ nach $\Gamma(M;T^*M \otimes E)$ auf, so zeigen Sie, dass für alle $s \in \Gamma(M;E)$ und $f \in \mathcal{E}(M)$ gilt:
$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

2. Sei ∇ eine covariante Ableitung auf einem Vektorraumbündel $\pi\colon E \to M$ und sei $\psi\colon E_u \to U \times \mathbf{R}^r$ eine Bündelkarte von E mit induzierten Basisschnitten $e_1, \ldots, e_r \in \Gamma(U;E_U)$.
   (a) Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte 1-Formen $\theta^\alpha_\beta \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ gibt $(1 \le \alpha, \beta \le r)$, so dass gilt:
   $$\nabla e_\beta = \theta^\alpha_\beta \otimes e_\beta.$$
   (b) Ist $x\colon U \to V$ eine Karte und sind $\Gamma^\alpha_{i\beta} \in \mathcal{E}(V)$ die Christoffel-Symbole von ∇ bzgl. ψ und x, so gilt mit den Formen $\theta^\alpha_\beta \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ aus (a):
   $$\theta^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta} dx^i.$$

3. Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\pi\colon \underline{\mathbf{R}}^r \to U$ das triviale Vektorraumbündel vom Rang r sowie $e_1, \ldots, e_r$ die lokalen Basisschnitte. Seien nun $\Gamma^\alpha_{i\beta} \in \mathcal{E}(U)$ beliebig $(1 \le i \le n,\ 1 \le \alpha, \beta \le r)$. Zeigen Sie, dass durch $\nabla\colon \mathcal{X}(U) \times \Gamma(\underline{\mathbf{R}}^r) \to \Gamma(\underline{\mathbf{R}}^r)$ eine covariante Ableitung gegeben ist, wenn man für $X = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ und $s = f^\alpha e_\alpha$ setzt:
$$\nabla_X s := (\xi^i D_i f^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta} \xi^i f^\beta) e_\alpha.$$

4. Sei $E \to M$ ein Vektorraumbündel vom Rank r über einer Mannigfaltigkeit der Dimension n und ∇ eine covariante Ableitung auf E. Sei $U \subseteq M$ offen und seien $x, y\colon U \to \mathbf{R}^n$ Karten auf U sowie $\varphi, \psi\colon E_U \to U \times \mathbf{R}^r$ Bündelkarten auf E_U mit Übergang $\tau\colon U \to \mathrm{GL}_r(\mathbf{R})$. Sind nun $\Gamma^\alpha_{i\beta}(x)$ bzw. $\tilde{\Gamma}^\gamma_{j\delta}(y)$ die Christoffelsymbole für ∇ bzgl. (x,φ) bzw. (y,ψ), so zeige man das folgende Transformationsverhalten:
$$\tilde{\Gamma}^\gamma_{j\delta} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \tau^\beta_\delta (\tau^{-1})^\gamma_\alpha (\Gamma^\alpha_{i\beta} \circ x) + (\tau^{-1})^\gamma_\alpha D_j \tau^\alpha_\delta.$$

Abgabe: Mittwoch 24. Mai 2006, 10.15 Uhr