Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
24.05.2006
Blatt 05

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Seien $E \to N$ und $F \to N$ Vektorbündel mit covarianten Ableitungen ∇^E und ∇^F und sei $\Phi \colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Sind ∇^E bzw. ∇^F bzgl. Bündelkarten durch 1-Formen ${}^E\theta^\alpha_\beta$ bzw. ${}^F\theta^\gamma_\delta$ beschrieben, so bestimmen Sie die 1-Formen ${}^{E\otimes F}\theta^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}$, die die induzierte covariante Ableitung auf $E \otimes F$ und auch die 1-Formen ${}^{\Phi^*F}\theta^\alpha_\beta$, die die covariante Ableitung auf Φ^*F bzgl. der induzierten Bündelkarten beschreiben (vgl. Aufgabe 2, Blatt 04).

2. Sei $\Phi \colon M^n \to N^m$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M und N, sei $F \to N$ ein Vektorbündel vom Rank r und ∇^F eine covariante Ableitung auf F. Sei weiter $V \subseteq N$ offen, $y \colon V \to \mathbf{R}^m$ eine Karte, $\psi \colon F_V \to V \times \mathbf{R}^r$ eine Bündelkarte, $(e_\alpha) \subseteq \Gamma(F_V)$ die induzierten Basisschnitte und $\Gamma^\alpha_{j\beta} \in \mathcal{E}(V)$ die induzierten Christoffelsymbole für ∇^F bzgl. (y, ψ). Sei schließlich $U \subseteq M$ offen mit $\Phi(U) \subseteq V$ und $x \colon U \to \mathbf{R}^n$ eine Karte. Zeigen Sie, dass durch $\nabla \colon \mathcal{X}(U) \times \Gamma(E_U) \to \Gamma(E_U)$ für $X = \xi^i \partial_i$, $s = f^\alpha(\Phi^* e_\alpha)$ und
$$\nabla_X s = (\xi^i (D_i f^\alpha + (\Gamma^\alpha_{j\beta} \circ y) D_i y^j f^\beta)) \Phi^* \sigma_\alpha$$
eine covariante Ableitung auf $E_U \to U$ definiert wird, wo $E = \Phi^* F$ sei und $x \mapsto y(x)$ die Beschreibung von Φ in den Karten x und y ist. Zeigen Sie auch, dass für $p \in U$, $\xi \in TM_p$ und $t \in \Gamma(F_V)$ gilt:
$$\nabla_\xi (\Phi^* t) = \nabla^F_{\Phi_* \xi}(t)$$

3. Seien $E \to M$ und $F \to M$ Vektorbündel mit covarianten Ableitungen ∇^E bzw. ∇^F. Zeigen Sie, dass es auf dem Summenbündel $E \oplus F \to M$ genau eine covariante Ableitung $\nabla^{E\oplus F}$ gibt, so dass für alle $X \in \mathcal{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$, $t \in \Gamma(F)$ gilt:
$$\nabla^{E\oplus F}_X (s, t) = (\nabla^E_X s, \nabla^F_X t).$$

4. Sei $E \to M^n$ ein Vektorbündel und für jedes $0 \le k \le n$ bezeichne $\mathcal{E}^{(k)}(E)$ *die E-wertigen k-Formen auf M*, d.i. $\mathcal{E}^{(k)}(E) := \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E)$. Sei nun $\nabla \colon \mathcal{E}^{(0)}(E) \to \mathcal{E}^{(1)}(E)$ eine covariante Ableitung auf E. Zeigen Sie, dass es für $0 \le k \le n$ genau einen lokalen Operator $D \colon \mathcal{E}^{(k)}(E) \to \mathcal{E}^{k+1)}(E)$ gibt, so dass für alle $\alpha \in \mathcal{E}^{(k)}(M)$ und $s \in \Gamma(E)$ gilt:
$$D(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^k \alpha \wedge \nabla s.$$

Abgabe: Mittwoch 31. Mai 2006, 10.15 Uhr