Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
31.05.2006
Blatt 06

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. (a) Sei $I \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, dass jedes Vektorbündel $\pi: E \to I$ trivial ist.
   (b) Sei $U \subseteq \mathbf{R}^n$ sternförmig. Zeigen Sie, dass jedes Vektorbündel $\pi: E \to U$ trivial ist.
   (Hinweis: Parallelverschiebung bzgl. eines Zusammenhangs ∇ auf E.)

2. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi: \underline{\mathbf{R}}^r \to M$ das triviale Vektorbündel vom Rang $r \geq 1$ über M. Bezeichne $e_1, \ldots, e_r \in \Gamma(\underline{\mathbf{R}}^r)$ die Basisschnitte, die durch $e_\alpha(p) = (p, f_\alpha) \in M \times \mathbf{R}^r$ ($\alpha = 1, \ldots, r$ und $(f_1, \ldots, f_r)$ die kanonische Basis vom $\mathbf{R}^r$) gegeben ist.
   (a) Zeigen Sie, dass durch $\nabla: \mathcal{X}(M) \times \Gamma(\underline{\mathbf{R}}^r) \to \Gamma(\underline{\mathbf{R}}^r)$ für $X \in \mathcal{X}(M)$ und $s = g^\alpha e_\alpha$, $g^\alpha \in \mathcal{E}(M)$ und
   $$\nabla_X s = (Xg^\alpha)e_\alpha$$
   eine covariante Ableitung auf $\underline{\mathbf{R}}^r$ gegeben ist.
   (b) Zeigen Sie, dass für eine glatte Kurve $\gamma: [0,1] \to M$ ein Schnitt $s = g^\alpha \gamma^* e_\alpha \in \Gamma(\gamma^* \underline{\mathbf{R}}^r)$ mit $g^\alpha \in \mathcal{E}([0,1])$ genau dann parallel ist, wenn $g^\alpha(t) = \text{const}$ ist ($\alpha = 1, \ldots, r$).

3. Sei $\pi: E \to M$ ein Vektorbündel, ∇ eine covariante Ableitung auf E und $p \in M$. Zeigen Sie dass es eine Umgebung $U \subseteq M$ von p und eine Bündelkarte $\psi: E_U \to U \times \mathbf{R}^r$ gibt, so dass für die induzierte *Zusammenhangsmatrix* $\theta = (\theta^\alpha_\beta) \in \mathrm{Mat}_r(\mathcal{E}^{(1)}(U))$ (vgl. Aufgabe 2, Blatt 04) gilt:
   $$\theta(p) = 0.$$
   (Hinweis: Sei $\varphi: U \to \mathbf{B}^n$ eine Karte mit $\varphi(p) = 0$. Definiere nun $\lambda: \mathbf{B}^n \times E_p \to E_U$ durch $\lambda(x, v) = \mathrm{par}_{\gamma_x}(v)$, wo $\gamma_x(t) := \varphi^{-1}(tx)$ sei, und dann ψ aus λ und φ geeignet.)

4. Sei ∇ eine covariante Ableitung auf einem Vektorbündel $\pi: E \to M$ und $\psi: E_U \to U \times \mathbf{R}^r$ eine Bündelkarte. Zeigen Sie:
   (a) Sind $e_1, \ldots, e_r \in \Gamma(E_U)$ die zugehörigen lokalen Basisschnitte und $\sigma^1, \ldots, \sigma^r \in \Gamma(E_U^*)$ dual dazu, so gibt es eindeutig bestimmte 2-Formen $\Xi^\alpha_\beta \in \mathcal{E}^{(2)}(U)$, so dass für die Krümmung R von ∇ gilt:
   $$R|U = \Xi^\alpha_\beta \otimes e_\alpha \otimes \sigma^\beta.$$
   (b) Sind $\theta^\alpha_\beta \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ die Zusamenhangsformen von ∇ bzgl. ψ, so gilt für die 2-Formen Ξ^α_β aus Teil (a) die *Formel von Maurer-Cartan*:
   $$\Xi^\alpha_\beta = d\theta^\alpha_\beta - \theta^\alpha_\gamma \wedge \theta^\gamma_\beta,$$
   für alle $1 \leq \alpha, \beta \leq r$, oder kürzer (in $\mathrm{Mat}_r(\mathcal{E}^*(U))$): $\Xi = d\theta - \theta \wedge \theta$.

Abgabe: Mittwoch 14. Juni 2006, 10.15 Uhr