Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
14.06.2006
Blatt 07

# Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Seien $(V_1, h_1)$ und $(V_2, h_2)$ euklidsche Vektorräume. Dann gibt es auf $V := V_1 \otimes V_2$ genau ein Skalarprodukt $h$, so dass für alle $v_1, w_1 \in V_1$ und $v_2, w_2 \in V_2$ gilt:

$$h(v_1 \otimes v_2, w_1 \otimes w_2) = h_1(v_1, w_1)h_2(v_2, w_2)$$

(Hinweis: Universelle Eigenschaft von $V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$)

2. (a) Seien $(V_1, h_1)$ und $(V_2, h_2)$ euklidsche Vektorräume. Zeigen Sie, dass es auf $V := V_1 \oplus V_2$ genau ein Skalarprodukt $h$ gibt, so dass für alle $v_1, w_1 \in V_1$ und $v_2, w_2 \in W_2$ gilt:

$$h((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = h_1(v_1, w_1) + h_2(v_2, w_2).$$

   (b) Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidscher Vektorraum der Dimension $n$ und $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass es auf $\Lambda^k V$ genau ein Skalarprodukt $h$ gibt, so dass für alle $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k \in V$ gilt (vgl. Aufgabe 3, Blatt 9, Diffgeo. 1):

$$h(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k, w_1 \wedge \ldots \wedge w_k) = \det(\langle v_i, w_j \rangle)_{ij}).$$

3. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel und $\nabla\colon \mathcal{E}^{(0)}(E) \to \mathcal{E}^{(1)}(E)$ eine covariante Ableitung auf $E$. Sei $D\colon \mathcal{E}^{(1)}(E) \to \mathcal{E}^{(2)}(E)$ der induzierte lokale Operator (vgl. Aufgabe 4, Blatt 05).

   (a) Zeigen Sie, dass $D^2 := D \circ \nabla\colon \mathcal{E}^{(0)}(E) \to \mathcal{E}^{(2)}(E)$ $\mathcal{E}(M)$-linear ist.

   (b) Sei nun $R$ die Krümmung von $\nabla$, interpretiert als globaler Schnitt in $\Lambda^2 T^*M \otimes E^* \otimes E$. Zeigen Sie: Interpretiert man auch $D^2$ aus Teil (a) als einen Schnitt in $\Lambda^2 T^*M \otimes E^* \otimes E$, also als eine $E^* \otimes E$-wertige 2-Form $\Xi \in \mathcal{E}^{(2)}(E^* \otimes E)$, so gilt:

$$R = \Xi.$$

4. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel, $p \in M$ und $k\colon TM_p \times TM_p \times E_p \to E_p$ antisymmetrisch in den ersten beiden Argumenten und sonst beliebig. Zeigen Sie, dass es eine covariante Ableitung $\nabla$ auf $E$ gibt, so dass für ihre Krümmung $R$ in $p$ gilt: $R_p = k$.

**Abgabe: Mittwoch 21. Juni 2006, 10.15 Uhr**