Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
21.06.2006
Blatt 08

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Sei $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ ein metrisches Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M.
   (a) Seien ∇_1, ∇_2 metrische Zusammenhänge auf E. Zeigen Sie, dass die Differenz $A := \nabla_2 - \nabla_1$ eine End(E)-wertige 1-Form ist, $A \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathrm{End}(E))$, die überall schiefadjungiert ist, d.h.: für alle $p \in M$, $\xi \in TM_{\mathsf{p}}$ und $v, w \in E_{\mathsf{p}}$ gilt:
   $$\langle A_{\xi} v, w\rangle_{\mathsf{p}} = -\langle v, A_{\xi} w\rangle_{\mathsf{p}}.$$
   (b) Sei ∇ ein metrischer Zusammenhang auf E und $A \in \mathcal{E}^{(1)}(\mathrm{End}^{\mathsf{s:a}}(E))$ eine beliebige 1-Form mit schiefadjungierten Werten auf M. Zeigen Sie, dass durch $\nabla' := \nabla + A$ ein metrischer Zusammenhang auf (E, h) gegeben ist.
   (c) Zeigen Sie, dass es einen metrischen Zusammenhang auf (E, h) gibt. (Hinweis: Nehmen Sie irgendeinen Zusammenhang ∇' auf E und "korrigieren" Sie diesen mit einer 1-Form A mit selbstadjungierten Werten in End(E) geeignet.)

2. Sei (E, h) ein metrisches Vektorbündel, ∇ ein metrischer Zusammenhang und $p \in M$.
   (a) Zeigen Sie, dass es eine Bündelkarte $\psi: E_{\mathsf{U}} \to U \times \mathbf{R}^{\mathsf{r}}$ um p gibt, $p \in U$, so dass die induzierten Basisschnitte $e_1, \ldots, e_{\mathsf{r}} \in \Gamma(E_{\mathsf{U}})$ in jedem Punkt $q \in U$ eine ON-Basis von E_{q} bilden. (Hinweis: Nehmen Sie zunächst irgendeine Bündelkarte und orthonormieren Sie dann die induzierten Basisschnitte mit Gram-Schmidt.)
   (b) Sei $\psi: E_{\mathsf{U}} \to U \times \mathbf{R}^{\mathsf{r}}$ eine Bündelkarte, so dass die induzierten Basisschnitte überall orthonormal sind. Zeigen Sie, dass dann für die Zusammenhangsmatrix $\theta \in \mathrm{Mat}_{\mathsf{r}}$ $(\mathcal{E}^{(1)}(U))$ von ∇ bzgl. ψ gilt:
   $$\theta^{\mathsf{T}} = -\theta.$$

3. (a) Sei ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang auf M. Zeigen Sie: Ein weiterer Zusammenhang ∇' auf M ist genau dann torsionsfrei, wenn die Differenz $A = \nabla' - \nabla$ ein symmetrisches $(1,2)$-Tensorfeld ist, $A(X,Y) = A(Y,X)$ für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.
   (b) Sei $A \in \Gamma(T^{(1;2)}(M)$ ein beliebiges anti-symmetrisches $(1,2)$-Tensorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M. Zeigen Sie, dass es einen Zusammenhang ∇ auf M gibt, dessen Torsion T gerade A ist, $T = A$.

Abgabe: Mittwoch 28. Juni 2006, 10.15 Uhr