Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
28.06.2006
Blatt 09

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Sei $\mathbf{S}^n$ die n-dimensionale Sphäre und $\varphi\colon \mathbf{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n$ die stereographische Projektion aus dem Nordpol $N = (0, \dots, 0, 1)$ heraus ($n \in \mathbf{N}$). Zeigen Sie, dass die sphärische Metrik g in dieser Karte gegeben ist durch ($1 \leq i, j \leq n$):
$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

2. Sei $\mathbf{P}^n$ der n-dimensionale reell-projektive Raum ($n \in \mathbf{N}$), $U = \{[p] \in \mathbf{P}^n : p^{n+1} \neq 0\}$ und $\varphi\colon U \to \mathbf{R}^n$, $\varphi([p]) = \frac{1}{p^{n+1}}(p^1, \dots, p^n)$ die Standardkarte auf U. Zeigen Sie, dass die sphärische Metrik g auf $\mathbf{P}^n$ in dieser Karte gegeben ist durch ($1 \leq i, j \leq n$):
$$g_{ij}(x) = \frac{(1 + |x|^2)\delta_{ij} - x^i x^j}{(1 + |x|^2)^2}.$$

3. Sei $\mathbf{H}^n$ der n-dimensionale hyperbolische Raum ($n \in \mathbf{N}$)und $\varphi\colon \mathbf{H}^n \to \mathbf{B}^n \subseteq \mathbf{R}^n$ die stereographische Projektion aus $S = (0, \dots, 0, -1)$ heraus, d.h. $\varphi(p) = x$, genau wenn $(x, 0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ der Schnittpunkt der Geraden durch p und S mit der Ebene $E = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x^{n+1} = 0\}$ ist. Berechnen Sie nun $\varphi^{-1}\colon \mathbf{B}^n \to \mathbf{H}^n$ und zeigen Sie dann, dass die hyperbolische Metrik in dieser Karte gegeben ist durch ($1 \leq i, j \leq n$):
$$g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |x|^2)^2}.$$

4. Sei $E \to M$ ein Vektorbündel und ∇ ein Zusammenhang auf E. Bezeichne $\Xi \in \mathcal{E}^{(2)}(E^* \otimes E)$ die Krümmung von ∇ (vgl. Aufg. 3, Blatt 7) und sei $D\colon \mathcal{E}^{(2)}(E^* \otimes E) \to \mathcal{E}^{(3)}(E^* \otimes E)$ der von ∇ induzierte lokale Operator (vgl. Aufg. 4, Blatt 5). Zeigen Sie (*die Bianchi-Identität*):
$$D\Xi = 0.$$
(Hinweis: O.E. sei $M = \mathbf{B}^n$, $E = \underline{\mathbf{R}}^r$, $p = 0$ und für die matrix-wertige 1-Form θ, die ∇ beschreibt: $\theta(p) = 0$ (siehe Aufg. 3, Blatt 6). Benutze dann Aufg. 4, Blatt 6.)

Abgabe: Mittwoch 5. Juli 2006, 10.15 Uhr