Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
05.07.2006
Blatt 10

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Sei $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ und $\zeta \in TM_p$. Sei $Z \in \mathcal{X}(M)$ eine beliebige Fortsetzung von ζ, $Z_p = \zeta$. Zeigen Sie, dass durch die folgende *Koszul-Formel* ein Zusammenhang ∇ auf M gegeben ist, der torsionsfrei und metrisch ist:

$$\begin{aligned}\langle(\nabla_X Y)_p, \zeta\rangle_p &= X_p\langle Y, Z\rangle + Y_p\langle Z, X\rangle - \zeta\langle X, Y\rangle \\ &\quad -\langle X_p, [Y, Z]\rangle_p + \langle Y_p, [Z, X]_p\rangle_p + \langle\zeta, [X, Y]_p\rangle_p.\end{aligned}$$

2. Sei V ein Vektorraum und $T \in \mathrm{LC}(V)$. Zeigen Sie, dass für alle $\xi_1, \ldots, \xi_4 \in V$ gilt:

$$T(\xi_1.\xi_2, \xi_3, \xi_4) = T(\xi_3, \xi_4, \xi_1, \xi_2).$$

3. Sei V ein Vektorraum und $T \in \mathrm{LC}(V)$. Zeigen Sie, dass für jede Auswahl von dreien der vier Argumente die Bianchi-Identität gilt, z.B. gilt für alle $\xi_1, \ldots, \xi_4 \in V$:

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) + T(\xi_1, \xi_4, \xi_2, \xi_3) + T(\xi_1, \xi_3, \xi_4, \xi_2) = 0.$$

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $k \in \mathrm{LC}(TM_p)$ beliebig. Zeigen Sie, dass es eine Riemannsche Metrik g auf M gibt für deren Riemannschen Krümmungstensor Rm_p in p gilt: $Rm_p = k$. (Hinweis: O.E. sei $M = \mathbf{B}^n$ und $p = 0$. Setze dann $g_{ij}(x) = \delta_{ij} + a_{ijkl}x^k x^l$ mit $a_{ijkl} \in \mathbf{R}$, symmetrisch in (i, j) und (k, l).)

Abgabe: Mittwoch 12. Juli 2006, 10.15 Uhr