Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
12.06.2006
Blatt 11

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Sei V ein $\mathbf{R}$-Vektorraum, $T \in \mathrm{LC}(V)$ ein Levi-Civita-Tensor und $s\colon V \times V \to \mathbf{R}$ seine zugeordnete biquadratische Form. Zeigen Sie für alle $\xi_1, \dots, \xi_4 \in V$ die folgende Polarisationsformel:
$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\mu}(s(\xi_1 + \lambda\xi_4, \xi_2 + \mu\xi_3) - s(\xi_1 + \lambda\xi_3, \xi_2 + \mu\xi_4))|_{(0,0)}.$$

2. Sei V ein $\mathbf{R}$-Vektorraum der Dimension n. Zeigen Sie, dass für den Raum der Levi-Civita-Tensoren $\mathrm{LC}(V)$ gilt:
$$\dim \mathrm{LC}(V) = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1).$$

3. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.
   (a) Für eine glatte Funktion $f\colon M \to \mathbf{R}$ definiert man den *Gradient von* f, $\mathrm{grad}(f) \in \mathcal{X}(M)$, durch die Forderung $g(\mathrm{grad}(f), X) = \langle df, X\rangle$, für alle $X \in \mathcal{X}(M)$. Zeigen Sie: Ist $x\colon U \to V \subseteq \mathbf{R}^n$ eine Karte auf M und (g_{ij}) die Darstellung der Metrik bzgl. x, so gilt für die Darstellung von $\mathrm{grad}(f)$ bzgl. x:
   $$\mathrm{grad}(f)|U = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$
   (b) Für eine glattes Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ definiert man die *Divergenz von* X, $\mathrm{div}(X) \in \mathcal{E}(M)$, durch $\mathrm{div}(X)(p) = \mathrm{tr}\{TM_p \to TM_p : \xi \mapsto \nabla_\xi X\}$. Zeigen Sie: Ist $x\colon U \to V$ eine Karte auf M und (Γ^k_{ij}) die Christoffelsymbole bzgl. x, so gilt, wenn $X|U = \xi^i\partial_i$ ist:
   $$\mathrm{div}(X)|U = \frac{\partial\xi^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij}\xi^j.$$

4. Sei $\mathbf{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen und $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{R}^n$ die Einheitssphäre. Sei B eine (symmetrische) Bilinearform auf $\mathbf{R}^n$ und $\mathrm{tr}(B)$ ihre Spur (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes). Zeigen Sie:
$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}(B) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbf{S})}\int_{\mathbf{S}} B(\xi, \xi)\, d\sigma.$$
(Hinweis: Gaußscher Divergenzsatz)

Abgabe: Mittwoch 19. Juli 2006, 10.15 Uhr