Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2006
19.06.2006
Blatt 12

Übungen zu "Differentialgeometrie II"

1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 1. Zeigen Sie, dass (M, g) *lokal euklidsch* ist, d.h.: zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine Karte $x\colon J \to I \subseteq \mathbf{R}$ um p, $p \in J$, so dass für das Koordinatenfeld $\partial/\partial x \in \mathcal{X}(J)$ gilt:

$$g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = 1.$$

2. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ ihr Levi-Civita-Zusammenhang, κ ihre Schnittkrümmung, Ric ihr Ricci-Tensor und S ihre Skalarkrümmung. Sei nun $\lambda > 0$ und $\tilde{g} := \lambda^2 g$. Zeigen Sie, dass für die zu $\tilde{g}$ gehörenden Größen gilt:

$$\tilde{\nabla} = \nabla,\ \tilde{\kappa} = \frac{1}{\lambda^2}\kappa,\ \tilde{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric},\ \tilde{S} = \frac{1}{\lambda^2}S.$$

3. Seien E und F Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit, ∇^E und ∇^F Zusammenhänge auf E bzw. F und (für jedes $k \in \mathbf{N}$) ∇ der induzierte Zusammenhang auf $(E^*)^{\otimes k} \otimes F$. Zeigen Sie: Identifiziert man $(E^*)^{\otimes k} \otimes F$ mit $\mathrm{Mult}_k(E; F)$, so gilt für alle $\alpha \in \Gamma(\mathrm{Mult}_k(E; F))$, $s_1, \ldots, s_k \in \Gamma(E)$ und $X \in \mathcal{X}(M)$:

$$\nabla_X \alpha(s_1, \ldots, s_k) = \nabla_X^F(\alpha(s_1, \ldots, s_k)) - \alpha(\nabla_X^E s_1, s_2, \ldots, s_k) - \ldots - \alpha(s_1, \ldots, s_{k-1}, \nabla_X^E s_k).$$

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$, $p \in M$ und $k\colon TM_p \times TM_p \to \mathbf{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeigen Sie, dass es eine Riemannsche Metrik g auf M gibt, so dass für ihre Ricci-Krümmung Ric im Punkt p gilt: $\mathrm{Ric}_p = k$.

Abgabe: Mittwoch 26. Juli 2006, 10.15 Uhr