Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2007
09.05.2007
Blatt 04

Übungen zu „Mathematik für Physiker II“

1. Sei $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ die Drehung um 90 Grad (in positiver Richtung), $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von $\mathbf{R}^2$ und $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ die Basis mit $v_1 = e_1$ und $v_2 = (1, 1)$. Bestimmen Sie die Matrizen $M(f; \mathcal{K}, \mathcal{K})$, $M(f; \mathcal{K}, \mathcal{A})$ und $M(f; \mathcal{A}, \mathcal{A})$.

2. Sei $V = \mathbf{R}[X]^{(4)}$ und $W = \mathbf{R}[X]^{(2)}$ sowie $D^2\colon V \to W$, $D^2(p) = p''$ und $\mathcal{K}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ die kanonische Basis von $K[X]^{(n)}$. Berechnen Sie die Matrix von D^2 bzgl. der Basen $\mathcal{K}_4$ und $\mathcal{K}_2$.

3. Seien V, W und U Vektorräume und $f\colon V \to W$ sowie $g\colon W \to U$ linear. Zeigen Sie, dass $g \circ f\colon V \to U$ auch linear ist.

4. Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension und $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ sein sogenannter *Dualraum*. Ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so definiert man für jedes $1 \leq i \leq n$ eine lineare Abbildung $f_i\colon V \to K$ durch
$$f_i(v_j) = \delta_{ij}$$
für alle $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie, dass $(f_1, \ldots, f_n)$ eine Basis von V^* ist. (Sie heißt *die zu $\mathcal{A}$ duale Basis*.)

Abgabe: Mittwoch, 16. Mai 2007, 10.15 Uhr