Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2007
16.05.2007
Blatt 05

Übungen zu „Mathematik für Physiker II“

1. Seien $f, g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$
$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2).$$

   Bestimmen Sie Kern und Bild von f und g.

2. (a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

   (b) Geben Sie zwei 2×2-Matrizen A, B an, so dass $AB \neq BA$ ist.

3. Beweisen Sie das Assoziativgesetz für Matrizen: Sind $m, n, r, s \in \mathbf{N}$, $A \in \mathrm{Mat}(m, n)$, $B \in \mathrm{Mat}(n, r)$ und $C \in \mathrm{Mat}(r, s)$, so gilt:

$$(AB)C = A(BC).$$

4. Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Auf der Menge $V/U := \{v + U : v \in V\}$ der *Linksnebenklassen* $v + U := \{v + u : u \in U\} \subseteq V$ führen wir folgende Verknüpfung ein:

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U, \quad \lambda \cdot (v + U) := (\lambda v) + U,$$

   für $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$.

   (a) Zeigen Sie, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind und V/U zu einem Vektorraum machen (dem *Quotientenraum von V nach U*).

   (b) Sei $\pi\colon V \to V/U$ gegeben durch $\pi(v) = v + U$. Zeigen Sie, dass π linear und $\ker(\pi) = U$ ist.

Abgabe: Mittwoch, 23. Mai 2007, 10.15 Uhr