Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2007
20.06.2007
Blatt 09

Übungen zu „Mathematik für Physiker II“

1. Gegeben seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_4$ durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie $\sigma_1\sigma_2$ und $\sigma_2\sigma_1$.

   (b) Berechnen Sie $\operatorname{sgn}(\sigma_1)$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2)$, $\operatorname{sgn}(\sigma_1\sigma_2)$ und $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)$.

2. (a) Sei K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_3(K)$. Zeigen Sie *die Regel von Sarrus*:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Sarrus-Regel für $n = 4$ nicht mehr gilt.

3. Sei K ein Körper, $n \in \mathbf{N}_0$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Man definiert dann *die Spur von A* durch $\mathrm{spur}\colon \mathrm{Mat}_n(K) \to K$,

$$\mathrm{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass spur linear ist und für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gilt:

$$\mathrm{spur}(BA) = \mathrm{spur}(AB).$$

   b) Sei nun V ein K-Vektorraum und $\mathcal{A}$ eine Basis von V. Man definiert dann für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$:

$$\mathrm{spur}(f) := \mathrm{spur}(M(f; \mathcal{A}, \mathcal{A})).$$

   Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}\colon \mathrm{End}(V) \to K$ wohldefiniert ist (d.h.: nicht von $\mathcal{A}$ abhängt), linear ist und für alle $f, g \in \mathrm{End}(V)$ gilt: $\mathrm{spur}(gf) = \mathrm{spur}(fg)$.

Abgabe: Mittwoch, 27. Juni 2007, 10.15 Uhr