Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2007
27.06.2007
Blatt 10

Übungen zu „Mathematik für Physiker II“

1. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbf{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Seien $k, l \in \mathbf{N}$, K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_k(K)$, $B \in \mathrm{Mat}(k, l; K)$ und $C \in \mathrm{Mat}_l(K)$. Zeigen Sie, dass für die folgende *Blockmatrix* gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$$

3. Sei K ein Körper und $n \in \mathbf{N}$. Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gibt mit $B = SAS^{-1}$. Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen gleiche Determinante und gleiche Spur haben (vgl. Aufgabe 3, Blatt 9).

4. Sei K ein Körper, $n \in \mathbf{N}$ und $\sigma \in \mathcal{S}_n$ eine Permutation. Die *zugehörige Permutationsmatrix* $A(\sigma) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ wird dadurch definiert, dass man $a_{i\sigma(i)} = 1$ und $a_{ij} = 0$ für $j \neq \sigma(i)$ setzt ($i = 1, \ldots, n$). Zeigen Sie:

$$\det(A(\sigma)) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

Abgabe: Mittwoch, 4. Juli 2007, 10.15 Uhr