Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2007
04.07.2007
Blatt 11

Übungen zu „Mathematik II für Physiker“

1. Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für folgendes $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{Q})$ und $b \in \mathbf{Q}^3$ mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbf{N}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen und ist $\det(A) = \pm 1$, so hat auch A^{-1} ganzzahlige Einträge.

3. Benutzen Sie die Inversendarstellung von $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ durch ihre Adjungierte, um zu zeigen:

   (a) Für $n = 2$ ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   (b) Geben Sie für $n = 3$ eine explizite Formel (wie unter (a)) für das Inverse einer Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(K)$ an.

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Zeigen Sie:

   (a) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, so gilt: $\mathrm{spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$.

   (b) Die folgende Matrix A ist nicht diagonalisierbar:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgabe: Mittwoch, 11. Juli 2007, 10.15 Uhr