Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2007
11.07.2007
Blatt 12

Übungen zu „Mathematik II für Physiker“

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 51 & 209 & -157 \\ -23 & -95 & 72 \\ -15 & -62 & 47 \end{pmatrix}$$

2. Sei K ein Körper, $K[T]$ der Polynomring über K und $R = \mathrm{Abb}(K, K)$ der Ring der Abbildungen von K nach K.

   (a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Phi\colon K[T] \to \mathrm{Abb}(K, K)$,

   $$\Phi(p)(\lambda) = p(\lambda),$$

   ein Ringhomomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie: Φ ist genau dann injektiv, wenn K unendlich viele Elemente hat.

   (c) Das Bild von Φ besteht aus *den Polynomfunktionen*, $\mathrm{Pol}(K) := \mathrm{im}(\Phi)$. Zeigen Sie: Ist K endlich, so ist jede Abbildung $f\colon K \to K$ Polynomfunktion. (Hinweis: Interpolation)

3. Zeigen Sie: Ist $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine obere Dreiecksmatrix mit gleichen Diagonaleinträgen (also $a_{ij} = 0$ für $i > j$ und $a_{ii} = \lambda$ für ein $\lambda \in K$ und allen $i = 1, \ldots, n$), aber keine Diagonalmatrix (also $a_{ij} \neq 0$ für wenigstens ein Paar (i, j) mit $i < j$), so ist A nicht diagonalisierbar.

Abgabe: keine mehr