Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. Frank Loose

SS 2007
16.07.2007

Klausur zu „Mathematik II für Physiker“

Klausur-Nr.:

Name, Vorname:

Geburtsdatum:

Matrikel-Nr.:

1. (a) Zeigen Sie, dass die folgende Familie $\mathcal{A} = (x_1, x_2, x_3)$ von Vektoren x_1, x_2, x_3 im Vektorraum $V = \mathbf{R}^3$ linear abhängig ist:
$$x_1 = (-2, 1, -1), \quad x_2 = (16, -8, -2), \quad x_3 = (4, -2, 0)$$
   (b) Sei V der $\mathbf{R}$-Vektorraum aller Funktionen auf $\mathbf{R}$, $V = \mathrm{Abb}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$. Zeigen Sie, dass die folgende Familie $\mathcal{A} = (f_1, f_2)$ von Vektoren f_1, f_2 in V linear unabhängig ist:
$$f_1 = \sin, \quad f_2 = \cos$$

2. (a) Wir betrachten die Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ von $\mathbf{R}^2$ mit $v_1 = (1, 1)$ und $v_2 = (1, -1)$ und die kanonische Basis $\mathcal{K}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbf{R}^3$. Bestimmen Sie die Matrix $A = M(f; \mathcal{A}, \mathcal{K}_3)$ der folgenden linearen Abbildung $f \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$,
$$f(x, y) = (x, x, y)$$
   (b) Sei nun $\mathcal{K}_2$ die kanonische Basis von $\mathbf{R}^2$ und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ die Basis von $\mathbf{R}^3$ mit $w_1 = e_1$, $w_2 = e_2$ und $w_3 = (1, 1, 1)$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen $T = M(\mathrm{id}; \mathcal{K}_2, \mathcal{A})$, $S = M(\mathrm{id}; \mathcal{K}_3, \mathcal{B})$ und damit dann $B = M(f; \mathcal{K}_2, \mathcal{B})$.

3. (a) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in $\mathbf{R}^4$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 0 \\
-x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & -1 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\
 & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0
\end{array}$$
   (b) Zeigen Sie: Für alle $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbf{R}$ ist das Gleichungssystem aus (a) eindeutig lösbar, wenn man die rechten Seiten vom Gleichheitszeichen durch y_1, y_2, y_3, y_4 ersetzt.

Bitte wenden!

4. (a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbf{R})$. Warum ist A invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie das Inverse von A.