Mathematik für Physiker II
SS 2007

nach Prof. Dr. Frank Loose
Katharina von Sturm, Vanessa Graber, Pascal Uther,
Konstantin Sering, Christoph Zimmermann, Matthias Körber

email: matthias@teure.info

Version: 0.23

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume **5**

1.1 Definition: Gruppe . . . 5
1.2 Kommentar . . . 5
1.3 Definition: abelsch . . . 5
1.4 Kommentar: additive Verknüpfung . . . 6
1.5 Beispiele . . . 6
1.6 Definition: Untergruppe . . . 7
1.7 Kommentar: jede Untergruppe ist Gruppe . . . 7
1.8 Beispiel . . . 7
1.9 Definition: K-Vektorraum . . . 7
1.10 Kommentar . . . 8
1.11 Beispiele . . . 9
1.12 Kommentar: geometrische Interpretation . . . 9
1.13 Definition: Untervektorraum . . . 10
1.14 Kommentar: Unterräume . . . 10
1.15 Beispiele: Unterräume . . . 10
1.16 Definition: Familie . . . 12
1.17 Kommentar: Familien und Folgen . . . 12
1.18 Bemerkung: Unterräume . . . 12
1.19 Definition: Erzeugendensystem . . . 13
1.20 Bemerkung . . . 13
1.21 Kommentar: Linearkombination . . . 13
1.22 Kommentar . . . 14
1.23 Beispiel: Erzeugendensysteme . . . 14
1.24 Definition: endlich erzeugt . . . 15
1.25 Beispiel: endlich erzeugt . . . 15
1.26 Motivation: sparsame Erzeugung . . . 15
1.27 Definition: linear unabhängig . . . 15
1.28 Kommentar: linear abhängig . . . 15
1.29 Beispiel: linear unabhängig . . . 16
1.30 Kommentar: linear unabhängig . . . 17
1.31 Definition: Basis . . . 17
1.32 Beispiel: (kanonische) Basis . . . 17
1.33 Kommentar: Basis . . . 17
1.34 Lemma . . . 18
1.35 Satz: Basen endlicher Länge . . . 18
1.36 Kommentar: Basis . . . 19
1.37 Satz: Basisergänzungssatz . . . 19
1.38 Satz: Länge von Basen . . . 19

1.39 Definition: Dimension von V . . . 20
1.40 Kommentar: wohldefinierte Dimensionen . . . 20
1.41 Korollar . . . 20
1.42 Beispiel: Dimension . . . 21
1.43 Definition: (direkte) Summe . . . 22
1.44 Kommentar: Komplement . . . 22
1.45 Beispiel: direkte Summe . . . 22
1.46 Satz . . . 23
1.47 Korollar: Dimensionsformel . . . 23

2 Lineare Abbildungen **24**
2.1 Definition: Homomorphismus . . . 24
2.2 Beispiel: Homomorphismen . . . 24
2.3 Definition: Matrix . . . 26
2.4 Kommentar: $(Mat(m, n, K), +, \cdot)$ als Vektorraum . . . 26
2.5 Definition: lineare Abbildung . . . 26
2.6 Kommentar: Spaltenvektoren . . . 26
2.7 Lemma: eindeutige Darstellung . . . 27
2.8 Bemerkung . . . 28
2.9 Satz: eindeutige lineare Abbildung . . . 28
2.10 Kommentar . . . 29
2.11 Definition: lineare Abbildung bezüglich zweier Basen . . . 29
2.12 Kommentar . . . 29
2.13 Beispiel: Abbildungsmatrizen . . . 31
2.14 Definition: Isomorphismus . . . 31
2.15 Kommentar: Isomorphismus . . . 32
2.16 Bemerkung . . . 32
2.17 Korollar . . . 33
2.18 Kommentar: Isomorphierelation . . . 33
2.19 Satz . . . 33
2.20 Kommentar: Koordinatenisomorphimus . . . 34
2.21 Satz . . . 35
2.22 Kommentar . . . 37
2.23 Definition: Kern und Bild . . . 37
2.24 Kommentar: Kern und Bild sind Unterräume . . . 37
2.25 Lemma: Zusammenhang Injektivität und Kern . . . 37
2.26 Kommentar: Rang von f . . . 38
2.27 Satz: Dimensionsformel . . . 38
2.28 Korollar . . . 40

Literatur:

- H. Fischer, H. Kaul: Mathemathik für Phyisker Band 1, Teubner
- S. Bosch: Lineare Algebra, Springer-Verlag
- G. Fischer: Lineare Algebra, Vieweg-Verlag
- M. Koecher: Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Springer-Verlag

1 Vektorräume

1.1 Definition: Gruppe

Ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $* : G \times G \mapsto G,\ (a, b) \to a * b$, heißt eine **Gruppe**, wenn folgendes gilt:

a) Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a * b) * c = a * (b * c)$ (**Assoziativgesetz**).

b) Es existiert ein Element $e \in G$, so dass gilt:

- **i)** $\forall\, a \in G$ ist $a * e = a = e * a$ (**Existenz des neutralen Elementes**)
- **ii)** Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$, so dass gilt: $a * b = e = b * a$ (**Existenz des inversen Elements**).

1.2 Kommentar

a) Ähnlich wie bei der Körperdefinition (siehe Teil I) sieht man, dass das neutrale Element $e \in G$ und auch das inverse Element $a \in G$ eindeutig bestimmt ist. (Übung)

b) Oft wird die Verknüpfung einer Gruppe G multiplikativ geschrieben (oder auch der Punkt ganz weggelassen),

$$a * b = a \cdot b = ab.$$

In diesem Fall wird das neutrale Element mit $e = 1$ und das zu $a \in G$ inverse Element mit a^{-1} bezeichnet,

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a,$$

$$a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$$

(vgl. allerdings 1.4).

1.3 Definition: abelsch

Eine Gruppe $(G, *)$ heißt **abelsch** (oder auch kommutativ), wenn für alle $a, b \in G$ gilt:

$$a * b = b * a \quad \text{(Kommutativgesetzt)}$$

1.4 Kommentar: additive Verknüpfung

a) Ist eine Gruppe $(G, *)$ abelsch, so notiert man ihre Verknüpfung meist additiv:

$$a * b = a + b.$$

Das neutrale Element wird dann üblicher Weise mit $e = 0$ und das inverse Element zu $a \in G$ wird mit $-a$ bezeichnet,

$$a + 0 = a = 0 + a,$$

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

b) Ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, so ist $(K, +)$ eine abelsche Gruppe, auch $(K^*, \cdot)$ mit $K^* = K \setminus \{0\}$ ist eine abelsche Gruppe und das Distributivgesetz gilt:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

für alle $a, b, c \in K$.

1.5 Beispiele

a) Eine Gruppe G besitzt nach (1.1 b) mindestens ein Element. Die einfachste aller Gruppen (die **triviale Gruppe**) ist daher sicher:

$$G = \{0\}$$

(mit der offensichtlichen Verknüpfung "$0 + 0 = 0$").

b) Jeder Körper K zusammen mit seiner Addition ist offenbar eine abelsche Gruppe, z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, F_2$.

c) Ist K ein Körper, so ist auch K^* zusammmen mit der Multiplikation des Körpers eine abelsche Gruppe, z.B.

$$\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{Q}^*, F_2^*.$$

d) $G = \mathbb{Z}$ zusammen mit der Addition ist eine (abelsche) Gruppe. (Übung)

e) Sei X eine beliebige Menge. Auf der folgenden Menge

$$G := \mathrm{Bij}(X) := \{f : X \to X |\ \text{f ist bijektiv}\}$$

betrachten wir die Verkettung

$$\circ : G \times G \to G,\ (f, g) \mapsto f \circ g$$

als Verknüpfung. Es ist dann G eine (wenn X mindestens drei Elemente hat nicht abelsche) Gruppe (Übung). Ist speziell X endlich mit n Elementen, sagen wir $X = \{1, ..., n\}$, so wird G mit:

$$\mathcal{S}_n := \mathrm{Bij}(\{1, ..., n\})$$

bezeichnet. Sie heißt die symmetrische Gruppe in n Einträgen und hat $n!$ Elemente.

1.6 Definition: Untergruppe

Sei G eine Gruppe. Eine nicht-leere Teilmenge $H \subseteq G$ heißt eine **Untergruppe** von G, wenn gilt:

a) Für alle $a, b \in H$ ist auch $ab \in H$;

b) für alle $a \in H$ ist auch $a^{-1} \in H$.

1.7 Kommentar: jede Untergruppe ist Gruppe

Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so enthält H nach Definition mindestens ein Element $a \in H$. Nach a) und b) ist dann aber auch $1 = a \cdot a^{-1} \in H$. Die Einschränkungen der Verknüpfung mit $* : H \times H \to H$ macht dann $(H, *)$ selbst zu einer Grupppe.

1.8 Beispiel

a) Ist G eine Gruppe so sind $H := \{1\}$ und $H := G$ offenbar Untergruppen (die **trivialen Untergruppen**).

b) Sei $G = \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist offenbar

$$n\mathbb{Z} = \{nk \ \in \ \mathbb{Z} : k \in \mathbb{Z}\}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$.

1.9 Definition: K-Vektorraum

Sei K ein Körper. Ein Tripel $(V, +, \cdot)$ heißt ein **K-Vektorraum** (Vektorraum über K), wenn V eine Menge, $+ : V \times V \to V$ eine (innere) Verknüpfung und $\cdot : K \times V \to V$ eine (äußere) Verknüpfung, so dass gilt:

a) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe;

b)

i) Für alle $v \in V$ gilt: $1 \cdot v = v$;

ii) für alle $v, w \in V$, und $\lambda \in K$ gilt:

$$\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w);$$

iii) für alle $v \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

$$(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v);$$

iv) für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v \in V$ gilt:

$$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v).$$

1.10 Kommentar

a) Ein K-Vektorraum V hat also stets mindestens ein Element: dass Nullement 0_V, welches man nicht mit dem Nullelement des Körpers 0_K verwechseln sollte. Der einfachste K-Vektorraum ist deshalb durch:

$$V = \{0\}$$

(und + und · in offensichtlicher Weise definiert) gegeben. Er heißt der **Null-Vektorraum**.

b) Die innere Verknüpfung + eines K-Vektorraums $(V, +, \cdot)$ wird überlicher Weise als die Addition in V und die äußere Verknüpfung · als skalare Multiplikation in V bezeichnet. Die Elemente von V heißen **Vektoren** und die Elemente aus dem Körper K nennt man üblicher Weise **Skalare**.

c) Oft spricht man (etwas ungenau) nur von einem Vektorraum V (unterdrückt also die Verknüpfungen + und · und auch den Grundkörper K), wenn klar ist, über welchem Körper der Vektorraum liegt. Der Punkt für die skalare Multiplikation wird häufig weggelassen und Punktrechnung geht wie üblich vor Strichrechnung, z.B. bedeutet:

$$\lambda v + \mu w = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot w)$$

für $\lambda,\ \mu \in K,\ v, w \in V$.

1.11 Beispiele

Sei K ein Körper.

a) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir auf dem cartesichen Produkt:

$$V = K^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in K, i = 1, ..., n\}$$

eine innere Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ durch

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) := (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

und eine äußere Verknüpfung $\cdot : K \times V \mapsto V$ durch

$$\lambda(x_1, ..., x_n) := (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

Dann wird $(V, +, \cdot)$ zu einem K-Vektorraum, den wir mit K^n bezeichnen (Übung).

b) Speziell im Fall $n = 1$ sehen wir, dass jeder Körper ein Vektorraum über sich selbst ist. (Die innere Multiplikation des Körpers $* : K \times K \mapsto K$ von K nun eben als skalare Multiplikation von K auf $K = V$ aufgefasst.)

c) Sei X (irgend) eine Menge. Auf

$$V := \mathrm{Abb}(X, K) := \{f : X \mapsto K \text{ Abbildung}\}$$

definieren wir innere und äußere Verknüpfung so:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$$

für $\lambda \in K$, $f, g \in V$, $x \in X$. Es wird dann V damit zu einem K-Vektorraum (Übung).

1.12 Kommentar: geometrische Interpretation

a) Für $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ bzw. $n = 3$ bietet Beispiel (1.11.a) ein Modell für die Anschauungsebene und den Anschauungsram. In ihm kann man die Addition und skalare Multiplikation durch die folgende **"Parallelogrammregel"** und **Streckung bzw. Stauchung** (geometrisch) interpretieren.

Abbildung fehlt

Die Theorie der Vektorräume (und ihrer linearen Abbildungen) wird deshalb auch geeignet sein, Probleme der **analytischen Geometrie** zu behandeln.

b) Die Axiome (a) und (b) aus (1.9) implizieren nun eine Reihe von Rechenregeln (ähnlich wie dies die Köperaxiome für das Rechnen in K tun (vgl. Teil 1)), z.B. gilt:

$$\forall\, v \in V : 0_K \cdot v = 0_V,$$

denn aus $0_K v = (0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$ folgt durch Addition des Negativen $-0_K v$ auf beiden Seiten, dass $0_V = 0_K v$. Im Folgenden lassen wir den Index 'K' oder 'V' weg, weil in der Regel klar sein wird, welche Null gemeint sein wird.

1.13 Definition: Untervektorraum

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine nicht-leere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt ein **Untervektorraum** von V (kurz: Unterraum), wenn folgendes gilt:

a) $\forall\, v, w \in U$ gilt: $v + w \in U$;

b) $\forall\, \lambda \in K, v \in U$ gilt: $\lambda \cdot v \in U$.

1.14 Kommentar: Unterräume

a) Jeder Unterraum $U \subseteq V$ enthält das Nullelement von V, denn es gibt ein $v \in U$. Wegen (b) ist dann auch $-v = (-1)v \in U$ und wegen (a) dann auch $0 = v + (-v) \in U$.

b) Die Einschränkungen von $+$ und $\cdot$ auf $U \times U$ und $K \times U$ machen dann $(U, +, \cdot)$ selbst zu einem K-Vektorraum.

c) $U = \{0\}$ und $U = V$ sind offenbar Unterräume. Sie heißen die **trivialen Unterräume**.

1.15 Beispiele: Unterräume

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei $v \in K^n$ beliebig. Dann ist

$$U := \{\lambda \cdot v \in V : \lambda \in K\} \quad (=: Kv)$$

ein Unterraum von V (denn $\lambda v + \mu v = (\lambda + \mu)v$ und $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$. Für $v \neq 0$ nennen wir U **eine Gerade in** K^n.

b) Seien $v, w \in K^n$ beliebig. Dann ist

$$U = \{\lambda v + \mu w \in V : \lambda, \mu \in K\}$$

Unterraum. (Übungsaufgabe) Für $v, w \neq 0$ und $w \notin Kv$ heißt **U eine Ebene** in K^n.

c) Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, ..., v_r \in V$ $(r \in \mathbb{N})$. Dann ist

$$U = \{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r \in V : \lambda_i \in K, i = 1, ..., r\}$$

ein Unterraum von V (Übung).

d) Sei $X = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ (oder $k = \infty$ oder $k = \omega$). Dann ist

$$U = \mathcal{C}^k(X) = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{R} : f \text{ ist k-mal stetig diff'bar}\} \subseteq Abb(X, \mathbb{R})$$

(vgl 1.11 c) (nach Teil I) ein Unterraum.

e) Sei

$$K[X] := \{a_0 + a_1 X + ... + a_r X^r : r \in \mathbb{N}_0,\ a_i \in K,\ i = 0, ..., r\}$$

die Menge der (**formalen) Polynome** mit Koeffizieten in K. Wir definieren

$$(a_0 + a_1 X + ... + a_r X^r) + (b_0 + b_1 X + ... + b_s X^s)$$

$$:= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_{max(r,s)} + b_{max(r,s)})X^{max(r,s)}$$

(wobei $a_i = 0$ für $i > r$ bzw. $b_j = 0$ für $j > s$ sei). Außerdem setzen wir:

$$\lambda(a_0 + a_1 X + ... + a_r X^r) := \lambda a_0 + (\lambda a_1)X + ... + (\lambda a_r)X^r.$$

Dann wird K[X] zusammen mit + und $\cdot$ zu einem K-Vektorraum (Übung).

f) Sei weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$K[X]^{(n)} := \{P \in K[X] : deg(P) \leq n\}$$

(mit $P = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ und $deg(P) = r :\Leftrightarrow r = max\{k \in \mathbb{N}_0 : a_k \neq 0\}$). Dann ist $K[X]^{(n)}$ ein Unterraum von $K[X]$.

1.16 Definition: Familie

Seien I und X Mengen. Eine **(I-indizierte) Familie** (von Mitgliedern) in X ist eine Abbildung $f : I \mapsto X$. Ist $a_i = f(i)$, für $i \in I$, so wird sie üblicher Weise mit

$$\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$$

bezeichnet. I heißt **Indexmenge** der Familie.

1.17 Kommentar: Familien und Folgen

a) Eine Familie in X ist etwas anderes als eine Teilmenge von X. Ist zum Beispiel I endlich mit $I = \{1, ..., n\}$, so ist eine Familie in X indiziert über I ein **n-Tupel**

$$\mathfrak{a} = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Dabei kommt es durchaus auf die Reihenfolge der Mitglieder an und es können auch Mitglieder mehrfach auftreten. Zu unterscheiden ist deshalb $\mathfrak{a}$ von der Teilmenge

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq X.$$

b) Ist $I = \mathbb{N}$, so heißt eine I-indizierte Familie in X eine **Folge in** X.

Im Folgenden sei K stets ein Körper.

1.18 Bemerkung: Unterräume

Sei V ein K-Vektorraum und sei $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch die Schnittmenge der Familie

$$U := \bigcap_{i\in I} U_i$$

ein Unterraum von V.

Beweis:
Da $0 \in U_i,\ \forall\ i \in I$, ist $0 \in U$ und damit $U \neq \emptyset$. Seien $v, w \in U \Rightarrow v, w \in U_i,\ \forall\ i \in I \Rightarrow v + w \in U_i,\ \forall\ i \in I \Rightarrow v + w \in U$. Ähnlich: $v \in U,\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$.

■

1.19 Definition: Erzeugendensystem

Sei V ein K-Vektorraum und $\mathfrak{a} = (v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V. Der kleinste Untervektorraum, der alle Mitgleider von $\mathfrak{a}$ enthält, heißt der von $\mathfrak{a}$ erzeugte Unterraum und wird mit $\langle\mathfrak{a}\rangle$ bezeichnet, also:

$$\langle\mathfrak{a}\rangle := \bigcap_{U\subseteq V \text{ Unterraum },\ \ U\ni v_i\ \forall\ i\in I} U.$$

Ist $W = \langle\mathfrak{a}\rangle \subseteq V$, so heißt $\mathfrak{a}$ ein **Erzeugendensystem von** W.

1.20 Bemerkung

Sei V ein K-Vektorraum und $\mathfrak{a} = (v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V. Dann gilt:

$$\langle\mathfrak{a}\rangle = \left\{\sum_{i\in I}\lambda_i v_i \in V :\ \lambda_i \in K \text{ für } i\in I \text{ , und } \lambda_i = 0 \text{ für fast alle } i\in I\right\}.$$

Beweis:
Jeder Unterraum $U \subseteq V$, der alle $v_i \in V$ enthält, $i \in I$, muss auch jede Linearkombination $\lambda_{i_1}v_{i_1} + ... + \lambda_{i_r}v_{i_r}$ enthalten. Setzen wir $U := \left\{\sum_{i\in I}\lambda_i v_i\right\}$ so ist also: $U \subseteq \langle\mathfrak{a}\rangle$ Es ist aber U offenbar auch eine Unterraum mit $v_i \in I$, $\forall\ i \in I$. Daher gilt auch $U \supseteq \langle\mathfrak{a}\rangle$, also:

$$U = \langle\mathfrak{a}\rangle.$$

■

1.21 Kommentar: Linearkombination

a) Ist I eine unendliche Menge, so bedeutet (wie in Teil 1) "für fast alle $i \in I$", dass für höchstens endlich viele $i \in I$ die Bedingung nicht gilt. In unserem Fall ist also :

$$\sum_{i\in I}\lambda_i v_i = \lambda_{i_1}v_{i_1} + ... + \lambda_{i_r}v_{i_r}$$

nur eine endliche Summe (wo $i_1, ..., i_r \in I$ gerade die Indizies i seien, wo $\lambda_i \neq 0$ ist). Damit ist auch erklärt, was die Summe "$\sum_{i\in I}$" bedeutet.

b) Wie in Teil 1 vereinbaren wir, dass für $I = \emptyset$:

$$\sum_{i\in\emptyset} := 0 \text{ (in } V)$$

sei.

c) Sind $v_1, ..., v_r \in V$ und $\lambda_1, .., \lambda_r \in K$ so nennt man:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$$

eine **Linearkombination** von $(v_1, ..., v_r)$ in V.

1.22 Kommentar

Sei V eine K-Vektorraum.

a) Setzt man $\mathfrak{a} = (v)_{v \in V}$ mit $I = V$, so ist natürlich $\langle \mathfrak{a} \rangle = V$, also $\mathfrak{a}$ Erzeugendensytem für V. Oft ist man allerdings interessiert, möglichst kleine Erzeugendensysteme für V zu finden.

b) Für $V = \{0\}$ ist offenbar die leere Familie (), das heißt $(I = \emptyset)$ ein Erzeugendensystem.

1.23 Beispiel: Erzeugendensysteme

Sei K (wie immer) ein Körper.

a) Für $n \in \mathbb{N}$ und jedem $i \in \{1, ..., n\}$ setzen wir:

$$e_i = (0, .., 0, \underbrace{1}_{\text{i-te stelle}}, 0, ..., 0) \in K^n.$$

Setzen wir für $j, k \in \mathbb{N}$:

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } j = k \\ 0 & \text{wenn } j \neq k \end{cases},$$

das so genannte **Kronecker-Symbol**, so ist also:

$$e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni}) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Es ist dann $\mathfrak{a} = (e_1, \dots, e_n)$ ein endliches Erzeugendensystem für $V = K^n$, denn jeder Vektor $v = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ist offenbar Linearkombination von $e_1, \dots, e_n$:

$$v = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots. + x_n e_n.$$

b) Die Familie der **Monome** $(1, X, X^2, \dots)$ ist ein Erzeugendensystem von $K[X]$.

1.24 Definition: endlich erzeugt

Ein K-Vektorraum heißt **endlich erzeugt**, wenn es ein endliches Erzeugendensystem $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt,

$$V = \langle (v_1, \ldots, v_n) \rangle =: \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.$$

1.25 Beispiel: endlich erzeugt

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nach (1.23) $V = K^n$ endlich erzeugt. $K[X]$ oder $\mathfrak{C}^k(I)$ $(I = [0, 1])$ (bei $K = \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$) sind es nicht (vgl. (1.42)).

1.26 Motivation: sparsame Erzeugung

Um einen Vektorraum „so sparsam wie möglich zu erzeugen“ führt man folgenden wichtigen Begriff ein:

1.27 Definition: linear unabhängig

Sei V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots v_n)$ bestehend aus n Vektoren heißt **linear unabhängig**, wenn folgendes gilt: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ derart, dass

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

ist, so muss bereits $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ sein.

1.28 Kommentar: linear abhängig

a) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig, genau wenn keines der Mitglieder Linearkombination der anderen ist,

$$v_i \notin < v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n >,$$

$\forall\ i = 1, \ldots, n$. Ist nämlich $(v_1, \ldots, v_n)$ **linear abhängig**, d.h. nicht linear unabhängig, so gibt es also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0,$$

und nicht alle $\lambda_i = 0$. Ist etwa $\lambda_1 \neq 0$ so ist dann:

$$v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n,$$

also Linearkombination von $v_2, \ldots, v_n$ Ist umgekehrt etwa v_n eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_{n-1}$,

$$v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{n-1} v_{n-1}$$

(mit $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1} \in K$) so ist

$$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{n-1} v_{n-1} + (-1) v_n = 0$$

also mit

$$\lambda_1 := \mu_1, \ldots, \lambda_{n-1} := \mu_{n-1}, \lambda_n := -1$$

auch

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0,$$

und dabei sind nicht alle λ_i's gleich Null.

b) Ist $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, so ist insbesondere $v_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, Weiter ist $v_2 \notin \langle v_1 \rangle, v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ usw., also $0 \subsetneq \langle v_1 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2 \rangle \subsetneq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \ldots \subsetneq \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

1.29 Beispiel: linear unabhängig

a) Die leere Familie () gelte als linear unabhängig.

b) Sei $V = K^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Denn ist $\mathfrak{a} = (e_1, \ldots, e_n)$ linear unabhängig, dann ist:

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$$

so ist $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

c) Die Familie $(1, X, X^2, \ldots)$ in $V = K[X]$ ist linear unabhängig (siehe (1.30), Übung).

d) Die Familie $\mathfrak{a} = ((1,0), (0,1), (1,1))$ in $V = K^2$ ist linear abhängig, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$v_3 = v_1 + v_2$$

mit $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$ und $v_3 = (1,1)$. Beachte aber: Jede der Teilfamilien $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)$ ist linear unabhängig.

1.30 Kommentar: linear unabhängig

a) Für eine unendliche Familie $(v_i)_{i\in I}$ in V sagt man, dass sie linear unabhängig ist, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

b) Wenn Erzeugendensysteme eines K-Vektrorraums V nicht zu klein sein können, können linear unabhängige Familien nicht zu groß sein. Gewissermaßen optional ist die Situation, wenn Folgendes vorliegt:

1.31 Definition: Basis

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Familie $\mathfrak{a} = (v_1, \dots, v_n)$ heißt eine **Basis** von V, wenn folgendes gilt:

a) $\mathfrak{a}$ ist Erzeugendensystem,

b) $\mathfrak{a}$ ist linear unabhängig.

1.32 Beispiel: (kanonische) Basis

a) Die leere Familie () ist also eine Basis des Nullraums.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist offenbar $\mathfrak{a} = (e_1, .., e_n)$ eine Basis von $V = K^n$. Wir nennen sie die **kanonische Basis** von K^n.

c) Auch $((1,1),(1,-1))$ ist z.B. eine Basis von $\mathbb{R}^2$ (oder allgemeiner K^2, wenn $1+1 \neq 0$ in K ist, Übung).

d) $(1, X, \dots, X^n)$ ist eine Basis von $K[X]^{(n)}$ (Übung)).

1.33 Kommentar: Basis

a) Allgemein sagt man, dass eine Familie $\mathfrak{a} = (v_i)_{i\in I}$ von Vektoren in V eine Basis heißt, wenn sie Erzeugendensystem und linear unabhängig ist.

b) Zum Beispiel ist $(1, X, X^2, X^3, \dots)$ in $K[X]$ eine Basis.

c) Es ist überhaupt nicht einfach zu sehen, dass jeder (endlich erzeugte) Vektorraum eine Basis hat, und dass je zwei Basen jeweils die gleiche Länge haben, d.h. die gleiche Anzahl von Mitgliedern. Dazu:

1.34 Lemma

Sei V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq n-1$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$, derart, dass $(v_1, .., v_r)$ linear unabhängig, aber $(v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig ist. Dann existiert ein $p \in \{r+1, \ldots, n\}$, so dass gilt:

$$< v_1, \ldots, v_n > = < v_1, \ldots, v_{p-1}, v_{p+1}, \ldots, v_n > .$$

Beweis:
Aus den Voraussetzungen folgt, dass es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und ein $p \in \{r+1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_p \neq 0$ gibt, so dass gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow v_p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_p} v_1 - \ldots - \frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p} v_{p-1} - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p} v_{p+1} - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_p} v_n \quad \in < v_1, \ldots, v_{p-1}, v_{p+1}, \ldots, v_n >$$

$$\Rightarrow < v_1, \ldots, v_n > = < v_1, \ldots, v_{p-1}, v_{p+1}, \ldots, v_n > .$$

■

1.35 Satz: Basen endlicher Länge

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann besitzt V eine Basis. Jede Basis von V hat endliche Länge.

Beweis:
Sei $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V. Durch Weglassen von Mitgliedern können wir $\mathfrak{a}$ gegebenenfalls so verkleinern, dass das (verkleinerte) $\mathfrak{a}$ **minimales Erzeugendensystem** ist (d.h.: jede Teilfamilie $\mathfrak{a}'$ von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$ ist kein Erz-System mehr). Sei also oBdA: $\mathfrak{a}$ ein min. Erzeugendensystem. Nach Lemma (1.34) muss $\mathfrak{a}$ dann schon linear unabhängig und damit eine Basis sein.
Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine endliche Basis, $(w_i)_{i \in I}$ eine beliebige Basis, so existiert eine endliche Teilmenge $I' \subseteq I$, so dass:

$$V = < v_1, \ldots, v_n > \subseteq < (w_i)_{i \in I'} >$$

denn jedes $v_k \quad (k = 1, \ldots, n)$ ist Linearkombination von nur endlich vielen w_i's. Dann ist bereits $(w_i)_{i \in I'}$ erzeugend und damit Basis, also $I' = I$.

■

1.36 Kommentar: Basis

a) Hier erst sieht man z.B., dass $V = K[X]$ nicht endlich erzeugt ist, denn $(1, X, X^2, \ldots)$ ist eine unendliche Basis.

b) Auch ist hier erst klar, dass z.B. $V = K^n$ keine unendliche Basis haben kann.

c) Noch nicht klar ist, dass für einen endlich erzeugten Vektorraum V je zwei Basen $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots, v_m)$ und $\mathfrak{b} = (w_1, \ldots, w_m)$ gleiche Länge haben, also $m = n$ ist.

1.37 Satz: Basisergänzungssatz

Sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_m \in V$ derart, dass $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig und $(w_1, \ldots, w_m)$ ein Erzeugendensystem ist. Dann existiert eine Zahl $r \leq n \leq r + m$ und paarweise verschiedene $i_{r+1}, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$, so dass:

$$(v_1, \ldots, v_r, w_{i_{r+1}}, \ldots, w_{i_n})$$

eine Basis von V ist.

Beweis:
Es gibt sicher paarweise verschiedene Indizes $i_{r+1}, \ldots, i_n$ (mit $r \leq n \leq r+m$), so dass $(v_1, \ldots, v_r, w_{i_{r+1}}, \ldots, w_{i_n})$ Erzeugendensystem wird. z.B. wenn man $n := r + m$ und $i_{r+1} := w_1, \ldots, i_{r+m} = w_m$ setzt. Anwendung von (1.34) liefert wiederrum, dass man durch Weglassen einiger w_{i_k}'s erreichen kann, dass $(v_1, \ldots, v_r, w_{i_1}, \ldots, w_{i_n})$ nicht nur erzeugend bleibt, sondern auch linear unabhängig, also eine Basis wird.

■

1.38 Satz: Länge von Basen

Sei V ein K-Vektorraum und seien $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathfrak{b} = (w_1, \ldots, w_m)$ Basen von V. Dann gilt: $n = m$.

Beweis:
Die linear unabhänige Familie $(v_2, \ldots, v_n)$ kann man nach (1.37) durch Hinzunahme mindestens eines Mitgliedes aus $\mathfrak{b}$ zu einer Basis von V ergänzen: $\exists\, i_1, \ldots, i_{r_1} \in \{1, \ldots, m\}$ paarweise verschieden mit $(w_{i_1}, \ldots, w_{i_{r_1}}, v_2, \ldots, v_n)$ ist Basis, $r_1 \geq 1$. Das gleiche Argument liefert $i_{r_1+1}, \ldots, i_{r_1+r_2} \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $i_1, \ldots, i_{r_1+r_2}$ paarweise verschieden sind mit:

$(w_{i_1}, \dots, w_{i_{r_1+r_2}}, v_3, \dots, v_n)$ ist Basis, $r_2 \geq 1$. Nach n Schritten gibt es also $i_1, \dots, i_{r_1+r_2+\dots+r_n} \in \{1, \dots, m\}$ paarweise verschieden, so dass $(w_{i_1}, \dots, w_{i_{r_1+\dots+r_n}})$ Basis von V ist. Also:

$$m \geq r_1 + \dots + r_n \geq \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-mal} = n.$$

Aus Symmetriegründen folgt auch $n \geq m$, also $n = m$.

■

1.39 Definition: Dimension von V

Sei V ein K-Vektorraum.

a) Ist V endlich erzeugt und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis und V, so heißt:

$$dim_K V := n$$

die **Dimension von** V (über K).

b) Ist V nicht endlich erzeugt, so setzen wir:

$$dim_K V := \infty.$$

1.40 Kommentar: wohldefinierte Dimensionen

a) Man beachte, dass erst Satz (1.38) (und (1.35)) sicher stellt, dass die Dimension eines Vektorraum **wohldefiniert** ist (d.h. unabhängig von der gewählten Basis).

b) Man kann zeigen, dass auch nicht endlich erzeugte Vektorräume stets eine Basis haben (siehe z.B. Bosch). Jeder Vektorraum hat also eine Basis!

1.41 Korollar

a) Ist V endlich erzeugt und $U \subseteq V$ ein Unterraum, so ist U auch endlich erzeugt und es gilt:

$$dim_K U \leq dim_K V.$$

b) Ist V endlich erzeugt, $U \subseteq V$ ein Unterraum mit $dim_K U = dim_K V$, so ist schon $U = V$.

Beweis a) Sei $\mathfrak{a} = (v_1 \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Sei weiter $\mathfrak{b} = (w_1, \ldots, w_k)$ linear unabhängig in U. Wegen (1.37) kann man $(w_1, \ldots, w_k)$ mit Mitglieder aus $\mathfrak{a}$ zu einer Basis von V ergänzen. Wegen (1.38) ist dann $k \leq n$. Insbesondere ist auch $U \subseteq V$ endlich erzeugt und $dim_K U \leq dim_K V$.

Beweis b) Ist nun $dim_K U = dim_K V$ und $\mathfrak{b} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basis von U, so muss $\mathfrak{b}$ auch Basis von V sein, sonst könnte man es mit mindestens einem Mitglied aus $\mathfrak{a}$ zu einer Basis von V ergänzen, die aber mehr als n Mitglieder hätte.

■

1.42 Beispiel: Dimension

a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist offenbar:

$$dim_K K^n := n,$$

weil $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis ist. (Für $n = 0$ fassen wir K^0 als den Nullvektorraum auf)

b) Die Polynome vom Grad kleiner gleich n erfüllen offensichtlich:

$$dim_K K[X]^{(n)} = n + 1,$$

weil $(1, X, \ldots, X^n)$ eine Basis ist.

c) Fasst man $V = \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf, so ist offenbar $(1, i)$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$. (Natürlich ist (1) eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}$.) Es ist also:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2, \text{ aber } \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

d) Natürlich ist z.B.

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{C}([a, b]) = \infty$$

(vgl. (1.25)), denn die Polynomfunktionen $Pol \subseteq \mathfrak{C}([a, b])$ sind bereits ein unendlich-dimensionaler Unterraum (Übung).

1.43 Definition: (direkte) Summe

Sei V eine K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume.

a) Es heißt dann:

$$U_1 + U_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in U_1, v_2 \in U_2\}$$

die **Summe von** U_1 **und** U_2.

b) Ist zudem $U_1 \cap U_2 = (0)$, so nennen wir die Summe **direkt** und schreiben dann $U_1 \oplus U_2$.

1.44 Kommentar: Komplement

a) $U_1 + U_2$ ist offenbar wieder Unterraum von V. Er ist der kleinste Unterraum von V, der sowohl U_1 als auch U_2 enthält,

$$U_1 + U_2 =< U_1 \cup U_2 > .$$

b) Jedes Element $v \in U_1 + U_2$ besitzt also eine Darstellung $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U_1$ und $v_2 \in U_2$. Ist die Summe direkt, so ist die Darstellung sogar eindeutig. Denn ist

$$v = v_1 + v_2 = w_1 + w_2$$

mit $v_1, w_1 \in U_1$ und $v_2, w_2 \in U_2$, so ist

$$w_1 - v_1 = v_2 - w_2 \in U_1 \cap U_2 = (0),$$

also $v_1 = w_1$ und $v_2 = w_2$.

c) Ist $V = U_1 \oplus U_2$, so nennt man U_2 ein **Komplement** von U_1 in V.

1.45 Beispiel: direkte Summe

Sei $V = K^3$ und $U_1 =< e_1, e_2 >$ und $U_2 =< e_1, e_3 >$ (wo (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis von V sei). Dann ist:

$$U_1 + U_2 =< e_1, e_2, e_3 >= V,$$

aber die Summe ist nicht direkt, denn es ist $U_1 \cap U_2 =< e_1 >\neq (0)$. Dagegen ist z.B. mit $U_2' :=< (1,1,1) >$:

$$V = U_1 \oplus U_2'.$$

1.46 Satz

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann gibt es ein Komplement $U' \subseteq V$, also $V = U \oplus U'$, und es gilt:

$$\dim V = \dim U + \dim U'.$$

Beweis:
Sei $\mathfrak{a} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V und $\mathfrak{b} = (w_1, \ldots, w_k)$ eine Basis von U ($k \leq n$). Wir ergänzen $\mathfrak{b}$ nach (1.37) mit Mitgliedern $v_{i_{k+1}}, \ldots, v_{i_n}$, paarweise verschieden, zu einer Basis von V und setzen:

$$U' := < v_{i_{k+1}}, \ldots, v_{i_n} > \subseteq V.$$

Dann ist $U \cap U' = (0), U + U' = V$, also $V = U \oplus U'$. Da $(v_{i_{k+1}}, \ldots, v_{i_n})$ Basis von U' ist gilt:

$$\dim U + \dim U' = k + (n - k) = n = \dim V.$$

■

1.47 Korollar: Dimensionsformel

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $U, U' \subseteq V$ Unterräume. Dann gilt die folgende **Dimensionsformel**:

$$\dim U + \dim U' = \dim(U + U') + \dim(U \cap U').$$

Beweis:
Sei $W \subseteq U$ ein Komplement von $U \cap U'$ in U und $W' \subseteq U'$ Komplement von $U \cap U'$ in U',

$$U = (U \cap U') \oplus W,$$
$$U' = (U \cap U') \oplus W'.$$

Es ist dann

$$U + U' = ((U \cap U') \oplus W) + ((U \cap U') \oplus W') = (U \cap U') + W + W'$$

und diese Summe ist sogar direkt (d.h. jeder Summand geschnitten mit der Summe der restlichen beiden ergibt den Nullraum (Übung)). Mit (1.46) ist:

$$\dim U = \dim(U \cap U') + \dim W,$$
$$\dim U' = \dim(U \cap U') + \dim W'$$

und

$$\dim(U + U') = \dim(U \cap U') + \dim W + \dim W'.$$

$\Rightarrow \dim(U+U')+\dim(U\cap U') = 2\dim(U\cap U')+\dim W+\dim W' = \dim U+\dim U'.$

■

2 Lineare Abbildungen

Sei K stets ein Körper.

2.1 Definition: Homomorphismus

Seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt (K-) linear (oder ein **(K-)Homomorphismus**), wenn gilt:

a) Für alle $v_1, v_2 \in V$ ist:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2);$$

b) für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$ gilt:

$$f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

2.2 Beispiel: Homomorphismen

a) Die Nullabbildung: $f : V \to W$ gegeben durch $f(v) = 0, \ \forall \ v \in V$, ist offenbar K-linear und wird oft mit $0 : V \to W$ bezeichnet.

b) Ist $V = W$ so hat man stets **die Identität** $f : V \to V$, gegeben durch $f(v) = v$, für alle $v \in V$. Sie ist offenbar K-linear. Bezeichnung: $id_V = f$.

c) Sei $V = W$ und $\lambda \in K$. Dann ist $f : V \to V$ gegeben durch:

$$f(v) = \lambda v,$$

für alle $v \in V$, auch K-linear und heißt **Streckung** (oder auch Homothetie).

d) Sei $V = \mathbb{R}^2, \ \varphi \in [0, 2\pi)$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben druch:

$$f(x_1, x_2) = (\cos(\varphi)x_1 - \sin(\varphi)x_2, \sin(\varphi)x_1 + \cos(\varphi)x_2).$$

Dann ist f $\mathbb{R}$-linear und beschreibt gerade **die Drehung um den Winkel** φ.

e) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$$

ist auch $\mathbb{R}$-linear. Sie beschreibt die **Spiegelung an der x_1-Achse** .

f) Die Abildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

ist auch $\mathbb{R}$-linear. Sie heißt **Projektion auf die x_1-Achse** (entlang der x_2-Achse).

g) Die Beispiele (d),(e) & (f) sind offenbar Spezialfälle folgender Situation: Seien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in K$ und

$$f : K^2 \to K^2,\ f(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2).$$

Das ist K-linear (Übung).

h) Die Abbildung $D : K[X] \to K[X]$, $D(p) = p'$, d.h für $p = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$,

$$D(p) = a_1 + 2a_2X + \ldots + na_nX^{n-1},$$

ist K-linear $(2 := 1 + 1, ...)$. Sie heißt **Ableitung**.

i) Sei $\mathfrak{R}([0, 1]) \subseteq Abb([0, 1)], \mathbb{R})$ der Unterraum der Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist $I : \mathfrak{R}([0, 1]) \to \mathbb{R}$,

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx,$$

auch $\mathbb{R}$-linear.

j) Seien V und W K-Vekorräume. Wir setzen:

$$Hom_K(V, W) = \{f : V \to W : f \text{ ist } K\text{-linear}\}$$

und nennen dies die **Homomorphismen von V nach W**. Für $f, g \in Hom_k(V, W)$ und $\lambda \in K$ setzen wir:

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v),$$

$$(\lambda f)(v) := \lambda f(v),$$

für alle $v \in V$. Dann wird $(Hom_K(V, W), +, \cdot)$ selbst zu einem K-Vektorraum (Übung).

2.3 Definition: Matrix

Sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Seien $a_{ij} \in K$ mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Dann nennen wir das **Zahlentableau**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eine **Matrix** (mit Einträgen aus K) mit m Zeilen und n Spalten und schreiben dafür:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n}.$$

2.4 Kommentar: $(Mat(m, n, K), +, \cdot)$ als Vektorraum

Wir setzen $Mat(m, n; K) := A = (a_{ij})$,

$$A \text{ ist } K\text{-Matrix mit m Zeilen und n Spalten}$$

und weiter für $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$, $\lambda \in K$:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}),$$

$$\lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij}).$$

Dann wird auch $(Mat(m, n, K), +, \cdot)$ zu einem K-Vektorraum (Übung).

2.5 Definition: lineare Abbildung

Sei $A \in Mat(m, n; K)$. Dann setzen wir $f_A : K^n \to K^m$:

$$f_A(x_1, ..., x_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n),$$

die **zu A gehörende lineare Abbildung** (von K^n nach K^m).

2.6 Kommentar: Spaltenvektoren

a) f_A ist tatsächlich K-linear (Übung).

b) Schreiben wir die Vektoren $x \in K^n$ und $y \in K^n$ **spaltenförmig**, d.h.:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

so schreibt sich $f_A : K^n \to K^m$ so:

$$f_A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: Ax$$

wenn wir die Multiplikation einer Matrix $A \subseteq Mat(m, n; K)$ mit einem Vektor $x \in K^n$ so definieren :

$$Mat(m, n; K) \times K^n \to K^m,$$

$$(A, x) \mapsto Ax$$

mit

$$Ax := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & +a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

c) Matrizen sind ein sehr effizientes Mittel um lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen zu beschreiben. Z.B. werden wir bald sehen (siehe (2.12)), dass jede lineare Abbildung $f : K^n \to K^m$ von der Form (b) ist, d.h.: es gibt ein $A \in Mat(m, n; K)$ mit $f = f_A$ (und A ist sogar eindeutig bestimmt).

2.7 Lemma: eindeutige Darstellung

Sei V ein K-Vektorraum. Ein n-Tupel $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ von Vektoren in V ($n \in \mathbb{N}$) ist genau dann eine Basis von V, wenn es für jedes $v \in V$ eine eindeutige Dastellung:

$$(*) \ v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n x_n$$

(mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$) gibt.

Beweis:
$\Rightarrow$: Ist $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$, eine Basis, so insbesondere Erzeugendensystem, $V =< v_1, ..., v_n >$. Für jedes $v \in V$ gibt es also eine Darstellung $(*)$. Ist nun:

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = v = \mu_1 v_1 + ... + \mu_n v_n$$

mit $\lambda_j,\ \mu_j \in K \quad (j = 1, ..., n)$, so ist

$$0 = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + ... + (\lambda_n - \mu_n)v_n$$

Da $\mathfrak{a}$ auch linear unabhängig ist, gilt also: $\lambda_j - \mu_j = 0 \quad (j = 1, ..., n)$, also $\lambda_j = \mu_j$. Die Darstellung ist also eindeutig.

$\Leftarrow$: (Übung).

$\blacksquare$

2.8 Bemerkung

Seien V und W K-Vektorräume, $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ Erzeugendensystem von V und $f : V \to W$ linear. Dann ist f bereist durch seine Werte auf $(v_1, ..., v_n)$ eindeutig bestimmt.

Beweis:
Für jedes $v \in V$ gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$. Da f K-linear ist, gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \\ &\overset{(2.1a)}{=} f(\lambda_1 v_1) + ... + f(\lambda_n v_n) \\ &\overset{(2.1b)}{=} \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) \end{aligned}$$

Also ist f druch $f(v_1), ..., f(v_n) \in W$ bereits festgelegt.

$\blacksquare$

2.9 Satz: eindeutige lineare Abbildung

Seien V und W K-Vektorräume, $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V und $w_1, ..., w_n \in W$ beliebig. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit

$$f(v_j) = w_j \;\; (j = 1, ..., n)$$

Beweis:
Eindeutigkeit: Nach (2.8) gibt es höchstens eine solche Abbildung. Existenz: Sei $v \in V$ beliebig und $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ die eindeutig bestimmten Skalare mit

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

(nach 2.7). Wir setzen dann $f : V \to W$,

$$f(v) := \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n.$$

Zu zeigen: f ist K-linear. Weil $f(v_j) = w_j$ für $1, ..., n$ ist erfüllt f dann das Gewünschte. Seien

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, \quad \widetilde{v} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\lambda}_j v_j$$

$$\Rightarrow v + \widetilde{v} = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \widetilde{\lambda}_j) v_j$$

$$\Rightarrow f(v + \widetilde{v}) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \widetilde{\lambda}_j) w_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{\lambda}_j w_j = f(v) + f(\widetilde{v}).$$

Ähnlich sieht man:

$$f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

für $\lambda \in K, v \in V$.

$\blacksquare$

2.10 Kommentar

Satz (2.9) ermöglicht es mit Matrizen $A \in Mat(m, n; K)$ auch lineare Abbildungen zwischen (abstrakten) Vektorräumen V und W zu beschreiben, wenn man Basen $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ von V und $\mathfrak{b} = (w_1, ..., w_m)$ von W gegeben hat.

2.11 Definition: lineare Abbildung bezüglich zweier Basen

Sei $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, $\mathfrak{b} = (w_1, ..., w_m)$ eine Basis von W und $A \in Mat(m, n; K)$. Wir setzen dann $f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : V \to W$,

$$f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) := \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \right) w_i.$$

2.12 Kommentar

a) $f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : V \to W$ ist tatsächlich linear (Übung). Sie ist die lineare Abbildung, die die Mitglieder v_j von $\mathfrak{a}$ gerade auf die Elemente

$$\widetilde{w}_j := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ \ (j = 1, ..., n)$$

abbildet:

$$f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v_j) = f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} v_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{jk})}_{=a_{ij}} w_i = \widetilde{w}_j.$$

b) Sei $V = K^n$ und $\mathfrak{K} = (e_1, ..., e_n)$ die kanonische Basis von K^n (vgl.(1.30 b)). Ist nun $A \in Mat(m, n; K)$, so ist mit den Bezeichnungen von (2.6) und Teil (a).

$$f_A = f_A^{\mathfrak{K}\mathfrak{K}},$$

denn f_A bildet offenbar e_j gerade auf $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$ ab.

c) Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ ist von der Form in (a): $f = f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, für ein eindeutig bestimmtest $A \in Mat(m, n; K)$! Ist nämlich $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ mit $a_{ij} \in K$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ so ist

$$f(v_j) = f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v_j)$$

und damit $f(v) = f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v)$, für alle $v \in V$ also:

$$f = f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Wir schreiben für diese Zuordnung.

$$A = M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

und nennen dies die **Matrix von f bezüglich der Basen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$**.

d) **Merkregel:** Die Bilder (unter f) der Basisvektoren (von $\mathfrak{a}$) stehen (in der Darstellung bezüglich $\mathfrak{b}$) in den Spalten der Matrix ($A = M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$).

e) Die Abbildungen:

$$\Phi : Mat(m, n; K) \to Hom_K(V, W),$$

$$\Phi(A) = f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

$$\Psi : Hom_K(V, W) \to Mat(m, n; K),$$

$$\Psi(f) = M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

sind bijektiv und invers zueinander (vgl.(2.21)),

$$\Psi \circ \Phi = id, \quad \Phi \circ \Psi = id.$$

2.13 Beispiel: Abbildungsmatrizen

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ (vgl.(2.2 e)) und $\mathfrak{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis. Weil:

$$f(e_1) = f(1,0) = (1,0) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

$$f(e_2) = f(0,1) = (0,-1) = 0e_1 - 1e_2$$

ist, gilt:

$$M(f; \mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Sei wieder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, aber diesmal $\mathfrak{a} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = (1,1)$ und $v_2 = (1,-1)$. Weil:

$$f(v_1) = f(1,1) = (1,-1) = v_2 = 0v_1 + 1v_2$$

und

$$f(v_2) = f(1,-1) = (1,1) = v_1 = 1v_2 + 0v_2$$

ist, gilt:

$$M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $V = K[X]^{(n)}$, $\mathfrak{a} = (1, X, ..., X^n)$ und $D : K[X]^{(n)} \to K[X]^{(n)}$, $D(p) = p'$ (vgl.(2.2 h)). Wegen

$$D(X^k) = kX^{k-1} \ \ (k = 0, \dots, n),$$

ist

$$Mat(D; \mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & n-1 \\ 0 & & & \dots & & 0 \end{pmatrix} \in Mat(n+1, n+1; K).$$

2.14 Definition: Isomorphismus

Seien V und W Vektorräume. Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt ein **Isomorphismus**, wenn f bijektiv ist.

2.15 Kommentar: Isomorphismus

a) Dass $f : V \to W$ bijektiv ist, bedeutet, dass es eine Abbildung $g : W \to V$ gibt, so dass $g \circ f = id_V$ und $f \circ g = id_W$ ist (nämlich $g = f^{-1}$). Ist $f : V \to W$ ein Isomorphismus so ist $g = f^{-1}$ auch automatisch linear (also auch ein Isomorphismus), denn sind $w_1, w_2 \in W$ und $v_1 = g(w_1), v_2 = g(w_2)$, so ist:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = f \circ g(w_1) + f \circ g(w_2) = w_1 + w_2,$$

also

$$g(w_1 + w_2) = g \circ f(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 = g(w_1) + g(w_2).$$

Ähnlich sieht man: $g(\lambda w) = \lambda g(w)$, für $\lambda \in K$ und $w \in W$.

b) Man sagt, dass zwei Vektorräume isomorph sind, und schreibt dafür

$$V \cong W,$$

wenn es einen Isomorphismus $f : V \to W$ gibt. Sie sind dann im Wesentlichen gleich, denn f ist nicht nur bijektiv (also eine 1:1-Beziehung), sondern respektiert auch die Strukturen $+$ und $\cdot$ der Vektorräume:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2),$$
$$f(\lambda v) = \lambda f(v),$$

für $v, v_1, v_2 \in V, \lambda \in K$.

2.16 Bemerkung

Seien V und W Vektorräume, $f : V \to W$ linear, $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren in V und $\mathfrak{b} = (f(v_1)), ..., (f(v_n))$. Dann gilt:

a) Ist f injektiv und $\mathfrak{a}$ linear unabhängig, so ist auch $\mathfrak{b}$ linear unabhängig.

b) Ist f surjektiv und $\mathfrak{a}$ Erzeugendensystem, so ist auch $\mathfrak{b}$ ein Erzeugendensystem.

Beweis a) Sei $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 f(v_1) + \lambda_n f(v_n) = 0 \overset{f\ linear}{\Rightarrow} f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = 0 \Rightarrow$ (f injektiv) $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow$ ($\mathfrak{a}$ linear unabhängig) $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$. Also ist $\mathfrak{b}$ linear unabhängig.

Beweis b) Sei $w \in W$ beliebig $\overset{f\ surjectiv}{\Rightarrow} \exists\ v \in V : f(v) = w \overset{\text{da } \mathfrak{a} \text{ Erz.-S.}}{\Rightarrow} \exists\ \lambda_1, ..., \lambda_n \in K : v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \Rightarrow w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$. Also ist $\mathfrak{b}$ Erzeugendensystem.

■

2.17 Korollar

Seien V und W Vektorräume mit $V \cong W$. dann gilt:

$$\dim V = \dim W.$$

Beweis:
Ist $\dim V = n < \infty$ und $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, so zeigt (2.16), dass für einen Isom. $f : V \to W$ gilt: $(f(v_1), ..., f(v_n))$ ist Basis von W, also

$$\dim W = n = \dim V.$$

Ist $\dim V = \infty$, so zeigt (2.16), dass auch W unendlich-dimensional ist.

$\blacksquare$

2.18 Kommentar: Isomorphierelation

a) (2.17) formuliert man auch so, dass die Dimension eines Vektorraums ein **(Isomorphie-) Invariante** ist. Es ist im Wesentlichen die einzige Invariante, wie wir gleich sehen werden.

b) Sind V, W und U Vektorräume und $f : V \to W$ und $g : W \to U$ linear, so ist auch $g \circ f : V \to W$ linear (Übung). Deshalb gilt auch: Sind f und g Isomorphismus, so auch $g \circ f$. Für die *Isomorphie-Relation* zwischen K-Vektorräumen gilt daher Folgendes:

i) $V \cong V$ (Reflexivität), für alle V, weil id_V ein Isom. ist.

ii) $V \cong W \Rightarrow W \cong V$ (Symmetrie), für alle V, W, denn ist $f : V \to W$ ein Isom., so auch $f^{-1} : W \to V$.

iii) $V \cong W,\ W \cong U \Rightarrow V \cong U$ (Transitivität), für alle V, W und U.

Es ist deshalb $\cong$ eine **Äquvivalenzrelation**.

2.19 Satz

Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$V \cong K^n.$$

Beweis:
Ist $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, so wissen wir bereits aus (2.7), dass die Abbildung:

$$T^{\mathfrak{a}} : K^n \to V,$$

$$T^{\mathfrak{a}}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

bijektiv ist. Sie ist offenbar auch K-linear und damit ein Isomorphismus.

■

2.20 Kommentar: Koordinatenisomorphimus

a) Unter den endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V gibt es nach (2.19) im Wesentlichen nur K^n ($n \in \mathbb{N}$). Man beachte allerdings, dass der Isomorphismus $T^{\mathfrak{a}}$ nicht kanonisch ist, sondern von der Basiswahl $\mathfrak{a}$ abhängt.

b) Man bezeichnet $T^{\mathfrak{a}}$ auch als **Koordinatenisomorphismus**. Sind V und W Vektorräume gleicher Dimension, $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ und $\mathfrak{b} = (w_1, ..., w_n)$ Basen von V und W, und $f : V \to W$ die lineare Abbildung, die durch $f(v_j) = w_j$ ($j = 1, ..., n$) bestimmt ist, so ist offenbar folgendes **Diagramm kommutativ**:

Abbildung fehlt

d.h.

$$f \circ T^{\mathfrak{a}} = T^{\mathfrak{b}}.$$

Denn $T^{\mathfrak{a}}$ bildet die kanonische Basis $\mathfrak{K}$ von K^n gerade auf $\mathfrak{a}$ ab und damit $f \circ T^{\mathfrak{a}}$ und $T^{\mathfrak{b}}$ beide die kanonische Basis auf $\mathfrak{b}$ ab. Es ist also

$$f = T^{\mathfrak{b}} \circ (T^{\mathfrak{a}})^{-1}$$

Isomorphismus,

$$V \cong W.$$

c) Bezeichnet man mit $E_n \in Mat(n, n; K)$ die **Einheitsmatrix**, d.h.:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}),$$

so gilt für $T^{\mathfrak{a}}$ und f aus Teil (b) mit (2.11):

$$T^{\mathfrak{a}} = f_E^{\mathfrak{K},\mathfrak{a}}, \qquad f = f_E^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

d) Mit den Bezeichnungen von (2.12) ist deshalb nun für beliebige endlich-dimensionale Vektorräume V und W, jeder linearen Abbildung $f : V \to W$, Basen $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ von V und $\mathfrak{b} = (w_1, ..., w_m)$ von W und der Matrix $A = M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in Mat(m, n; K)$ folgendes Diagramm kommutativ:

Abbildung fehlt

also

$$f \circ T^{\mathfrak{a}} = T^{\mathfrak{b}} \circ f_A.$$

Setzt man nämlich $\widetilde{w}_j := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ $(j = 1, ..., n)$, so bilden $f \circ T^{\mathfrak{a}}$ und $T^{\mathfrak{b}} \circ f_A$ beide die kanonische Basis $\mathfrak{K} = (e_1, ...e_n)$ von K^n gerade auf $(\widetilde{w}_1, ..., \widetilde{w}_n)$ ab:

$$f \circ T^{\mathfrak{a}}(e_j) = f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \widetilde{w}_j,$$

$$T^{\mathfrak{b}} \circ f_A(e_j) = T^{\mathfrak{b}}(Ae_j) = T^{\mathfrak{b}}(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} T^{\mathfrak{b}}(e_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \widetilde{w}_j.$$

Man sagt: $A = M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ beschreibt die lineare Abbildung $f : V \to W$ in den Koordinaten bezüglich $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

2.21 Satz

Seien V und W Vektorräume der Dimensionen n und m, $\mathfrak{a}$ eine Basis von V und $\mathfrak{b}$ eine Basis von W. Dann sind die Abbildungen.

$$\Phi : Mat(m, n) \to Hom(V, W),$$

$$\Phi(A) = f_A^{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}},$$

$$\Psi : Hom(V, W) \to Mat(m, n),$$

$$\Psi(f) = M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

Isomorphismen und invers zueinander.

Beweis a)
Ist $\mathfrak{a} = (v_1, ..., v_n)$ und $\mathfrak{b} = (w_1, ..., w_m)$, so ist $\Phi(A) : V \to W$ die lineare Abbildung, die v_j auf $\widetilde{w_j} := \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ abbildet. Für $A, B \in Mat(m, n)$ bildet also $\Phi(A + B)$ den Vektor v_j aus $\mathfrak{a}$ auf

$$\widetilde{\widetilde{w_j}} = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) w_i = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i$$

ab, genauso wie $\Phi(A) + \Phi(B)$. Also ist $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$. Ähnlich sieht man: $\Phi(\lambda A) = \lambda\Phi(A),\ \forall\ A \in Mat(m, n),\ \forall\ \lambda \in K$. Also ist Φ linear.

Beweis b)
Ist $f : V \to W$ linear und $A = M(f; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, so ist $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$. Ist $B = M(g; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für ein $g \in Hom(V, W)$, so ist also:

$$(f + g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^m b_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + b_{ij}) w_i$$

also $A + B = M(f + g; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. d.h. :

$$\Psi(f + g) = \Psi(f) + \Psi(g).$$

Ähnlich:

$$\Psi(\lambda f) = \lambda\Psi(f),\ \forall\ f \in Hom(V, W), \lambda \in K.$$

Damit ist Ψ linear.

Beweis c)
Für $A \in Mat(m, n)$ ist $f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$, also ist

$$\Psi \circ \Phi(A) = \Psi(f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) = A.$$

Ist $f \in Hom(V, W)$ und $(a_{ij}) = A = \Psi(f)$, so ist $f(v_j) = \sum_{i=1} a_{ij} w_i$ und daher für jedes $j = 1, \ldots, n$:

$$\Phi \circ \Psi(f)(v_j) = \Phi(A)(v_j) = f_A^{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = f(v_j),$$

also ist

$$\Psi \circ \Phi = id,\ \Phi \circ \Psi = id.$$

■

2.22 Kommentar

a) Da $Mat(m,n;K) \cong K^{mn}$ (mit $(a_{ij}) \mapsto (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ...a_{mn})$) ist, wissen wir, dass $\dim_K Mat(m,n) = m \cdot n$ ist. Es ist also:

$$dim\ Hom(V,W) = dimV \cdot dimW$$

b) Satz (2.21) ist der präzise Ausdruck dafür, dass man endlich-dimensionale Probleme über Vektorräume und lineare Abbildungen mit Matrizen behandeln kann.

2.23 Definition: Kern und Bild

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt:

a) $ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\} \subseteq V$ der **Kern von f**.

b) Es heißt

$$im(f) := \{w \in W : \ \exists \ v \in V : \ f(v) = w\} \subseteq W$$

das **Bild von f**.

2.24 Kommentar: Kern und Bild sind Unterräume

$ker(f) \subseteq V$ und $im(f) \subseteq W$ sind nicht nur Teilmengen von V und W, sondern sogar Untervektorräume. Sind nämlich $v_1, v_2 \in ker(f)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, so ist:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0,$$

also (da $0 \in ker(f)$) ist $ker(f)$ Untervektorraum. Ähnlich ist offenbar $0 \in im(f)$ und für $w_1, w_2 \in im(f)$ (also gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = w_1$ und $f(v_2) = w_2$), $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ ist:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2,$$

also $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in im(f)$ und damit $im(f) \subseteq W$ ein Unterraum von W.

■

2.25 Lemma: Zusammenhang Injektivität und Kern

Sei $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

a) Es ist f injektiv genau wenn

$$ker(f) = \{0\}\,.$$

b) Ist $(v_1, ..., v_n)$ Erz-System für V, so ist $(f(v_1), ..., f(v_n))$ Erz-System für $im(f)$.

Beweis a)
$\Rightarrow$ Sei $f(v) = 0$, also $v \in ker(f)$. Wegen $f(0) = 0$ und der Injektivität von f folgt: $v = 0$. $\Rightarrow ker(f) = \{0\}$.
$\Leftarrow$ Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = f(v_2)$

$$\Rightarrow 0 = f(v_2) - f(v_1) \underbrace{=}_{linear} f(v_2 - v_1),$$

also $v_2 - v_1 \in ker(f) = \{0\} \Rightarrow v_1 = v_2$. Also ist f injektiv.

Beweis b)
Schränkt man den Wertebreich von f auf $im(f) \subseteq W$ ein, also $\widetilde{f} : V \to im(f)$, $\widetilde{f}(v) = f(v)$, so ist $\widetilde{f}$ surjektiv. Nach (2.16.b) ist dann $(\widetilde{f}(v_1), ..., \widetilde{f}(v_n)) = (f(v_1), ..., f(v_n))$ Erzeugendensystem von $im(f)$.

■

2.26 Kommentar: Rang von f

a) Die Dimension von $im(f)$ kann höchstens $\dim(V)$ sein, denn ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, so ist $(f(v_1), ..., f(v_n))$ immer noch erzeugend für $im(f)$, also:

$$dim(im(f)) \leq n = \dim V.$$

b) Es kann daher z.B. keine surjektive, lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ geben. (Nicht lineare surjektive (sogar bijektive) Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt es sehr wohl.)

c) Man nennt:

$$rg(f) := \dim(im(f))$$

den **Rang von** f. (Beachte: $0 \leq rg(f) \leq min\{\dim V, \dim W\}$.)

2.27 Satz: Dimensionsformel

Seien V und W Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$\dim(ker(f)) + \dim(im(f)) = \dim V.$$

Beweis:
Sei $\dim(ker(f)) =: k < \infty$ und $\dim(im(f)) =: l < \infty$. Sei weiter $(v_1, ..., v_k)$ Basis von $ker(f)$ und $(w_{k+1}, ..., w_{k+l})$ eine Basis von $im(f) \subseteq W,\ n := k + l$. Wähle dann:

$$v_{k+1}, ..., v_n \in V \text{ mit } f(v_j) = w_j \ (j = k+1, ..., n).$$

Behauptung: $(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n)$ ist eine Basis von V.

a) Lineare Unabhängigkeit: Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= f(0) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) \\
&= \underbrace{\lambda_1 f(v_1)}_{=0} + ... + \underbrace{\lambda_k f(v_k)}_{=0} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) \\
&= \lambda_{k+1} \underbrace{f(v_{k+1})}_{=w_{k+1}} + ... + \lambda_n \underbrace{f(v_n)}_{=w_n} \\
&\Rightarrow \lambda_{k+1} w_{k+1} + ... + \lambda_n w_n = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_{k+1} = ... = \lambda_n = 0,
\end{aligned}$$

weil auch $(w_{k+1}, ..., w_n)$ linear unabhängig ist.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0,
\end{aligned}$$

weil $(v_1, ..., v_k)$ linear unabhängig ist. Insgesamt: $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ also: $(v_1, ..., v_n)$ ist linear unabhängig.

b) Erzeugendensystem: Sei $v \in V$ beliebig. Da $(w_{k+1}, ..., w_n)$ Erz-System von $im(f)$ ist, existieren $\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n \in K$ mit $f(v) = \lambda_{k+1} w_{k+1} + ... + \lambda_n w_n$

$$\Rightarrow f(v) = \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + ... + \lambda_n f(v_n) = f(\lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n)$$

$$\Rightarrow f(v - \lambda_{k+1} v_{k+1} - ... - \lambda_n v_n) = 0.$$

Da $(v_1, ..., v_n)$ erzeugend für $ker(f)$ ist, gibt es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit

$$v - \lambda_{k+1} v_{k+1} - ... - \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$$

$$\Rightarrow v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + ... + \lambda_n v_n.$$

Also ist $(v_1, ..., v_n)$ auch erzeugend und es folgt:

$$\dim(ker(f)) + \dim(im(f)) = k + l = n = \dim V.$$

Teil a) zeigt auch, dass für den Fall, wo $ker(f)$ oder $im(f)$ unendlich dimensional sind, es auch V ist. Mit $a + \infty := \infty, \ \ \forall\, a \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, gilt (2.27) also auch im ∞-dimensionalen Fall.

■

2.28 Korollar

Sei $\dim V = \dim W < \infty$ und $f : V \to W$ linear. Dann gilt:

a) Ist f injektiv, so ist f bereits bijektiv.

b) Ist f surjektiv, so ist f bereits bijektiv.

Beweis a)
Aus f injektiv, folgt: $\dim(ker(f)) = 0$. Also ist $im(f) \subseteq W$ ein Unterraum mit:

$$\dim(im(f)) = \dim V - \dim ker(f) = \dim V = \dim W.$$

Also ist nach (1.41.b) $im(f) = W$ und damit f auch surjektiv.

Beweis b)
Ist f surjektiv, so ist also $im(f) = W$ und damit

$$\dim(ker(f)) = \dim V - \dim(im(f)) = \dim V - \dim W = 0,$$

also $ker(f) = \{0\}$, und damit f nach (2.25) auch injektiv.

■