Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
20.04.2009
Blatt 01

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. Zeigen Sie,
$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+2).$$

2. Seien $k, l \in \mathbf{N}$, K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_k(K), B \in \mathrm{Mat}(k,l;K)$ und $C \in \mathrm{Mat}_l(K)$. Zeigen Sie, dass für folgende Blockmatrix gilt:
$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C).$$

3. Sei K ein Körper, $n \in \mathbf{N}_0$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Man definiert dann *die Spur von* A durch $\mathrm{spur}\colon \mathrm{Mat}_n(K) \to K$,
$$\mathrm{spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$
   (a) Zeigen Sie, dass spur linear ist und für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gilt:
   $$\mathrm{spur}(BA) = \mathrm{spur}(AB).$$
   (b) Sei nun V ein K–Vektorraum und $\mathcal{A}$ eine Basis von V. Man definiert dann für einen Endomorphismus $f\colon V \to V$:
   $$\mathrm{spur}(f) := \mathrm{spur}(M(f;\mathcal{A},\mathcal{A})).$$
   Zeigen Sie, dass $\mathrm{spur}\colon \mathrm{End}(V) \to K$ wohldefiniert ist (d.h.: nicht von $\mathcal{A}$ abhängt), linear ist und für alle $f, g \in \mathrm{End}(V)$ gilt: $\mathrm{spur}(gf) = \mathrm{spur}(fg)$.

4. Benutzen Sie die Inversendarstellung von $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ durch ihre Adjungierte, um zu zeigen:
   (a) Für $n = 2$ ist
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
   (b) Geben Sie für $n = 3$ eine explizite Formel (wie unter (a)) für das Inverse einer Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(K)$ an.

Abgabe: Montag, 27. April 2009, 10.15 Uhr