Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
27.04.2009
Blatt 02

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für folgendes $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{Q})$ und $b \in \mathbf{Q}^3$ mit Hilfe der Cramerschen Regel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbf{N}$ und $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen und ist $\det(A) = \pm 1$, so hat auch A^{-1} ganzzahlige Einträge.

3. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbf{N}$, K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, so gelten folgende Rechenregel für die Adjunkte $A^\sharp$ von A:

$$(A^\sharp)^t = (A^t)^\sharp, \quad (AB)^\sharp = B^\sharp A^\sharp, \quad \det A^\sharp = \det(A)^{n-1}, \quad (A^\sharp)^\sharp = (\det A)^{n-2} A.$$

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes folgenden *Isomorphiesatz*: Seien R und S kommutative Ringe mit 1 und $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt:

$$\mathrm{im}(f) \cong R/\ker(f).$$

Abgabe: Montag, 4. Mai 2009, 10.15 Uhr