Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
4.04.2009
Blatt 03

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. Betrachten Sie $f, g \in \mathbf{Q}[X]$ mit
$$f = 3X^5 + 1, \quad g = X^2 + X + 1.$$
Dividieren Sie f durch g mit Rest.

2. (a) Formulieren und beweisen Sie den Satz über die Divisoren mit Rest im Ring der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}$

   (b) Zeigen Sie: $\mathbf{Z}$ ist Hauptidealring.

3. Zeigen Sie:

   (a) Ist $p \in \mathbf{R}[X]$ und $z \in \mathbf{C}$ eine komplexe Nullstelle von p, so gilt auch $p(\bar{z}) = 0$.

   (b) Ist $i \in \mathbf{C}$ die imaginäre Einheit und $p \in \mathbf{R}[X]$ mit $p(i) = 0$, so ist $p \in (X^2 + 1)$.

   (c) Ist $\Psi : \mathbf{R}[X]/(X^2 + 1) \to \mathbf{C}$ der vom Einsetzungshomomorphismus für i induzierte Ringhomomorphismus, so gilt Ψ ist ein Ring–Isomorphismus.

4. Zeigen Sie mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Algebra: Ist $f \in \mathbf{R}[X]$, $f \neq 0$, so gibt es eine reelle Zahl $c \neq 0$ und (eindeutig bestimmte, normierte) Polynome $p_1, \ldots, p_r$ vom Grad 1 und Polynome $q_1, \ldots, q_s$ vom Grad 2, so dass gilt:
$$f = c \cdot p_1 \cdots p_r \cdot q_1 \cdots q_s.$$

Abgabe: Montag, 11. Mai 2009, 10.15 Uhr