Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
11.05.2009
Blatt 04

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. Seien $m, n \in \mathbf{Z}$. Wir sagen m *teilt* n (in Zeichen: $m|n$; m heisst dann ein *Teiler von* n), falls es ein $q \in \mathbf{Z}$ gibt mit $mq = n$. Ferner heisst $d \in \mathbf{Z}$ *größter gemeinsamer Teiler* von m und n, falls $d|m$ sowie $d|n$ und für jeden weiteren Teiler d' von m und n gilt: $d'|d$. Schließlich sei mit $\operatorname{ggT}(m, n)$ der größte gemeinsame Teiler von m und n gemeint, welcher nicht–negativ ist. Zeigen Sie:
   (a) $m = \pm n$ genau dann wenn $m|n$ und $n|m$.
   (b) Die Zahl $\operatorname{ggT}(m, n)$ ist eindeutig, falls sie existiert. (Die Existenz des ggT wird in der nächsten Aufgabe behandelt).

2. Seien $m, n \in \mathbf{Z}$. Wir wollen im folgenden den *Euklidischen Algorithmus* studieren, welcher die Existenz des $\operatorname{ggT}(m, n)$ beweist und zugleich diese Zahl ermittelt. Dabei können wir annehmen, dass $n > 0$ ist (warum?). Wir setzen $x_0 := m$ und $x_1 := n$. Dann existiert nach Aufgabe 2 auf Blatt 3 ein q_1 und ein x_2 mit den Eigenschaften
$$x_0 = q_1 x_1 + x_2, \quad 0 \leq x_2 < x_1.$$
   Wir definieren den Algorithmus nun rekursiv weiter: Sind x_{k-1} und x_k $(k \geq 1)$ gegeben, so existieren Zahlen q_k und x_{k+1} mit den Eigenschaften:
$$x_{k-1} = q_k x_k + x_{k+1}, \quad 0 \leq x_{k+1} < x_k.$$
   (a) Begründen Sie, dass ein $n \in \mathbf{N}$ existiert, so dass $x_{n+1} = 0$ und $x_n \neq 0$ ist.
   (b) Zeigen Sie: x_n ist der größte gemeinsame Teiler von m und n.

3. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus die Zahlen $\operatorname{ggT}(238, 35)$ und $\operatorname{ggT}(239, 35)$.

4. Sei $A \in \operatorname{Mat}_2(K)$. Zeigen Sie:
   (a) Ist A ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, so gilt: $\operatorname{spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$.
   (b) Die folgende Matrix A ist nicht diagonalisierbar:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abgabe: Montag, 18. Mai 2009, 11 Uhr