Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
8.06.2009
Blatt 07

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. (Satz des Pythagoras) Seien v, w, u paarweise verschiedene Vektoren in einem euklidischen Vektorraum mit zugehöriger Metrik d, weiter $a = d(w,u)$, $b = d(u,v)$, $c = d(v,w)$ und $\varphi = \angle(v-u, w-u) \in [0,\pi]$. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras (und seine Umkehrung): $\varphi = \pi/2$, genau wenn $a^2 + b^2 = c^2$ ist.

2. (a) Sei $V = \mathbf{K}[X]^{(2)} = \{p \in \mathbf{K}[X] : \deg(p) \leq 2\}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbf{K}$ gegeben durch
$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 \bar{p}(x)q(x)\,dx.$$
Bestimmen Sie die beschreibende Matrix $A = M(\langle\cdot,\cdot\rangle; \mathcal{A})$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (1, X, X^2)$.

   (b) Sei $V = \{f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ stetig} : f \text{ ist } 2\pi\text{–periodisch}\}$ und $U := \operatorname{span}(\sin, \cos) \subseteq V$. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbf{R}$,
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx.$$
Zeigen Sie: Setzt man $e_1 := \sqrt{2}\sin$, $e_2 = \sqrt{2}\cos$, so ist (e_1, e_2) eine ON–Basis von U.

3. Sei $s \colon V \times V \to \mathbf{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum V. Man nennt dann $q \colon V \to \mathbf{R}$, $q(v) := s(v,v)$, die *zugehörige quadratische Form*. Zeigen Sie, dass man s aus q wie folgt zurück gewinnen kann (so genannte *Polarisierungsformel*):
$$s(v,w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w)).$$

4. Seien $A, B \in \operatorname{Sym}_n(\mathbf{R})$. Zeigen Sie:

   (a) $\langle A, B\rangle := \operatorname{spur}(AB)$ ist ein Skalarprodukt auf $\operatorname{Sym}_n(\mathbf{R})$.

   (b) Mit obigem Skalarprodukt gilt für die induzierte Norm :
$$||A|| \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{spur}(A).$$
(Hinweis: Benutzen Sie, ohne Beweis, dass jede symmetrische Matrix diagonalisierbar ist.)

Abgabe: Montag, 16. Juni 2009, 11 Uhr