Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
15.06.2009
Blatt 08

Übungen zu „Lineare Algebra II"

1. Sei $V = \mathbf{R}^2$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben durch
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2.$$
   (a) Sei $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von V und $\mathcal{B} = ((1,1),(0,1))$. Bestimmen Sie die Matrizen $A = M(\langle \cdot, \cdot \rangle; \mathcal{K})$ und $B = M(\langle \cdot, \cdot \rangle; \mathcal{B})$.
   (b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{K}$ und prüfen Sie, ob tatsächlich $B = S^t A S$ ist.

2. (a) Seien
$$v_1 = (1,0,0,0),\ v_2 = (1,0,1,0),\ v_3 = (1,1,1,2)$$
   Vektoren im $\mathbf{R}^4$ und $U := \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3)$. Bestimmen Sie mit dem Gram–Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthogonalbasis von U bezüglich dem standard euklidischen Skalarprodukt auf $\mathbf{R}^4$.
   (b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis für den euklidischen bzw. unitären Vektorraum aus Aufgabe 2(a) auf Blatt 7.

3. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass
$$U^\perp := \{ v \in V : \langle u, v \rangle = 0,\ \forall u \in U \}$$
   ein Unterraum von V ist und es gilt: $V = U \oplus U^\perp$ ($U^\perp$ heißt das *orthogonale Komplement von* U). Welche Dimension hat also $U^\perp$?

4. Sei $s \colon V \times V \to \mathbf{K}$ eine Hermitesche Form auf einem $\mathbf{K}$–Vektorraum V und $V_0 \subseteq V$ sein Entartungsraum. Sei weiter $\bar{V} := V/V_0$ und $\pi \colon V \to \bar{V}$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie: Es gibt genau eine nicht-ausgeartete Billinearform $\bar{s} \colon \bar{V} \times \bar{V} \to \mathbf{K}$ mit
$$\bar{s} \circ (\pi \times \pi) = s$$

Abgabe: Montag, 22. Juni 2009, 11 Uhr