Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
22.06.2009
Blatt 09

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. Sei V ein endlich–dimensionaler $\mathbf{R}$–Vektorraum. Man nennt eine Bilinearform ω auf V *symplektisch*, wenn sie schiefsymmetrisch und nicht–entartet ist. Das Paar (V,ω) heißt dann *symplektischer Vektorraum*.

   (a) Sei $V = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ und

   $$\omega_0\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := \langle x_1, y_2\rangle - \langle x_2, y_1\rangle$$

   wo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard–Skalarprodukt auf dem $\mathbf{R}^n$ sei. Zeigen Sie (V,ω_0) ist ein symplektischer Vektorraum.

   (b) Sei (V,ω) symplektisch und $\mathcal{A} = (v_1,\ldots,v_n)$ eine Basis. Zeigen Sie: $A = M(\omega,\mathcal{A})$ ist schiefsymmetrisch und hat vollen Rang.

2. (a) Zeigen Sie, dass jeder symplektische Vektorraum von gerader Dimension ist.

   (b) Für einen symplektischen Vektorraum (V,ω) heisst eine Basis $(e_1,\ldots,e_n,f_1,\ldots,f_n)$ von V eine *Darboux–Basis*, falls $\omega(e_i,f_j) = \delta_{ij}$ und $\omega(e_i,e_j) = \omega(f_i,f_j) = 0$ für $1 \le i,j \le n$. Zeigen Sie, dass die kanonische Basis des $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ eine Darboux-Basis für den symplektischen Vektorraum $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \omega_0)$ aus Aufgabe 1(a) ist.

3. Wir betrachten den $\mathbf{R}^n$ mit seinem kanonischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$. Wir nennen eine lineare Abbildung $f_x\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ eine *Spiegelung*, falls $f_x(x) = -x$ und $f_x(y) = y$ für alle $y \in \mathrm{span}(x)^\perp$.

   (a) Zeigen Sie

   $$f_x(v) = v - \frac{2\langle v, x\rangle}{||x||^2}x$$

   für alle $v \in \mathbf{R}^n$. Zeigen Sie weiter, dass $A := M(f_x;\mathcal{K},\mathcal{K})$ eine orthogonale Matrix ist falls $\mathcal{K}$ die kanonische Basis des $\mathbf{R}^n$ bezeichnet (eine solche Matrix bezeichnen wir ebenfalls als Spiegelung).

   (b) Zeigen Sie: Sind $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^n$ mit $||v_1|| = ||v_2|| \neq 0$, so existiert ein $x \in \mathbf{R}^n$ und eine Spiegelung f_x, so dass entweder $f_x(v_1) = v_2$ oder $f_x(v_1) = -v_2$ ist.

4. Zeigen Sie: Jede orthogonale Matrix $A \in O(n)$ ist ein Produkt von Spiegelungen. (Hinweis: vollständige Induktion.)

Abgabe: Montag, 29. Juni 2009, 11 Uhr