Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
29.06.2009
Blatt 10

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. (a) Wir definieren für $n \in \mathbf{N}$ die *spezielle orthogonale Gruppe* bzw. die *spezielle unitäre Gruppe* durch

$$\begin{aligned} \mathrm{SO}(n) &:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) : AA^T = E_n,\ \det(A) = 1\} \text{ bzw.} \\ \mathrm{SU}(n) &:= \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) : AA^* = E_n,\ \det(A) = 1\}. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie: $SO(n)$ und $SU(n)$ sind Untergruppen der $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ bzw. der $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

   (b) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung wohldefiniert und bijektiv ist:

$$S : S^3 \to SU(2),\ (z_1, z_2) \mapsto S(z_1, z_2) := \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

   wo $S^3 \subseteq \mathbf{C}^2$ die sogenannte *3-Sphäre* ist, also $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$.

2. Wir definieren für $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in \mathrm{SO}(3)$ sich zerlegen lässt in

$$A = \begin{pmatrix} R(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   für geeignete $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$.

3. Zeigen Sie, dass jeder symplektische Vektorraum eine Darboux-Basis besitzt. (Hinweis: versuchen Sie, das Gram–Schmidtsche Orthonomalisierungsverfahren zu imitieren.)

4. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum.

   (a) Sei V^* der Dualraum von V. Zeigen Sie, dass $\iota\colon V \to V^*$, $\iota(v)(w) := \langle v, w\rangle$ ein Isomorphismus ist.

   (b) Sei $f^\star\colon V^* \to V^*$ die duale Abbildung zu f (d.h. $f^\star(\alpha) := \alpha \circ f$, $\alpha \in V^*$) und f^* die adjungierte Abbildung zu f. Zeigen Sie: $f^* = \iota^{-1} \circ f^\star \circ \iota$.

Abgabe: Montag, 6. Juli 2009, 11 Uhr