Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
6.07.2009
Blatt 11

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$, so dass $S^T AS$ zu einer Diagonalmatrix wird.

2. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 1 & -3 \\ -10 & 10 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

ein $S \in GL_3(\mathbf{R})$, so dass $S^{-1}AS$ zu einer oberen Dreiecksmatrix wird.

3. (a) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$ zwei Matrizen, die kommutieren, also $AB = BA$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbf{N}$ gilt

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

(Hinweis: vollständige Induktion nach m.)

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$ eine obere Dreiecksmatrix bei der die Diagonaleinträge alle gleich einem $\lambda \in \mathbf{K}$ sind mit $\lambda \neq 0$. Zeigen Sie: es gibt ein $m \in \mathbf{N}$, so dass

$$A^{-1} = -\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-\lambda)^{-k} A^{k-1}$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass $A - \lambda E_n$ nilpotent ist, d.h. es gibt ein $m \in N$, so dass $(A - \lambda E_n)^m = 0$ ist. Orientieren Sie sich dabei an der Aufgabe 3, Blatt 12 der Linearen Algebra 1.)

4. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer bzw. unitärer Vektorraum. Zeigen Sie: ist $f \in \mathrm{End}(V)$ ein selbstadjungierter, nilpotenter Endomorphismus, so ist $f = 0$.

Abgabe: Montag, 13. Juli 2009, 11 Uhr