Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
13.07.2009
Blatt 12

Übungen zu „Lineare Algebra II“

1. Zeigen Sie, dass die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{Q})$ ein zerfallendes charakteristisches Polynom besitzt und bestimmen Sie $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{Q})$, so dass SAS^{-1} Jordansche Normalform hat,
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Für jedes $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ definiert man
$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k,$$
wobei eine Folge von Matrizen genau dann konvergiert, wenn die einzelnen Einträge der Matrix in $\mathbf{R}$ konvergieren. Die Matrix, welche aus diesen Grenzwerten besteht ist dann der Grenzwert der Folge von Matrizen. Ohne Beweis: $\exp(A)$ konvergiert für jedes $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$.
   (a) Bestimmen Sie für folgendes $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ Matrizen $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$, eine Diagonalmatrix D und eine nilpotente Matrix N mit $DN = ND$, so dass gilt $SAS^{-1} = D + N$.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
   (Hinweis: Jordansche Normalform.)
   (b) Berechnen Sie nun $\exp(A)$.

3. Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ mit zerfallendem charakteristischem Polynom. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedene Eigenwerte von f und sei $p_f \in K[X]$ das Minimalpolynom von f. Sind $d_1, \dots, d_r \in \mathbf{N}$ die Potenzen, wo $\ker(\lambda_j \mathrm{id} - f)^{d_j}$ zum ersten Mal stationär wird, so gilt
$$p_f = \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{d_j}.$$

4. Sei V ein 5–dimensionaler $\mathbf{Q}$–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit Minimalpolynom p_f gegeben durch
$$p_f = (X-1)(X+2)^3.$$
Welche Jordansche Normalformen für f kommen dann in Frage? (Hinweis: Überlegen Sie, welche charakteristische Polynome in Frage kommen. Welcher Zusammenhang be– steht zwischen den Vielfachheiten der Nullstellen des charakteristischen Polynoms und des Minimalpolynoms?)

Abgabe: Montag, 20. Juli 2009, 11 Uhr