Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
P. Konstantis

SS 2009
25.07.2009

Klausur zu „Lineare Algebra II“

Klausur–Nummer:
Name, Vorname:
Geburtsdatum:
Matrikel–Nummer / Studiengang :

1. (a) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbf{Q})$ und begründen Sie, warum A invertierbar ist:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
(3 Punkte).
   (b) Berechnen Sie $\det(4A^{-2})$ für die Matrix aus Teilaufgabe (a) **(1 Punkt)**.

2. (a) Sei $V := \mathrm{span}((1,0,1,0),(1,1,1,0),(0,0,1,1)) \subseteq \mathbf{R}^4$. Berechnen Sie eine Orthonomalbasis für V **(2 Punkte)**.
   (b) Sei $0 \neq A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$, so dass $AS = SA$ für alle $S \in \mathrm{SO}(2)$ ist. Zeigen Sie: Es existiert ein $\lambda > 0$ mit $\lambda A \in \mathrm{SO}(2)$ **(2 Punkte)**.

3. (a) Begründen Sie, warum die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$$
diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie ein $S \in GL_3(\mathbf{R})$, so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist **(3 Punkte)**.
   (b) Geben Sie eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{Q})$ an, die über $\mathbf{Q}$ nicht diagonalisierbar ist und begründen Sie **(1 Punkt)**.

4. (a) Sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbf{Q}).$$
Das charakteristische Polynom lautet $\chi_A(X) = (X-2)^2(X-1)^2$. Geben Sie die Jordansche Normalform der Matrix A an **(2 Punkte)**.
   (b) Gegeben eine Matrix A mit Einträgen aus $\mathbf{Q}$ vom Rang 3 und mit charakteristischem Polynom
$$\chi_A(X) = X^3(X-2)(X+3)^2.$$
Welche möglichen Jordanschen Normalformen kommen für A in Frage? **(2 Punkte)**.

Bearbeitungszeit: 90 Minuten.