Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 09

Mathematik II für Biologen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 3.7.2009)

Aufgabe 31 Matlab (10 Punkte)

Die Datei `fishy.dat` enthält in der ersten Spalte die Länge (in cm), in der zweiten Spalte das Gewicht (Einheit leider unbekannt) und in der dritten Spalte den DDT-Gehalt (in ppm) von $n = 96$ Welsen, die im Tennessee River in Alabama, USA, gefangen wurden (Quelle: Mendenhall, Sincich: *Statistics for Engineering and the Sciences*, Prentice Hall. Appendix III. Daten leicht geändert, daher das y im Dateinamen.).

a) Bestimmen Sie den empirischen Median der DDT-Gehalte.
b) Ist dieser empirische Median signifikant (zum Signifikanz-Niveau $\alpha = 5\%$) von 10 verschieden? Beantworten Sie diese Frage mit einem zweiseitigen Vorzeichentest.
c) Bestimmen Sie das zum Vorzeichentest gehörige 95%-Vertrauensintervall $[a, b]$ für den "wahren, theoretischen" Median des DDT-Gehaltes eines solchen Fisches, indem Sie den Test aus Aufgabe (b) für verschiedene Werte wiederholen und dabei beobachten, ob der Test verwirft. Bestimmen Sie dabei a und b so genau, dass die erste Ziffer nach dem Komma sicher stimmt.

Unvollständiger Matlab-Code:

```
load fishy.dat
ddt=fishy(:,3);
[p,h]=signtest(ddt,10)  % help signtest
```

Aufgabe 32 (10 Punkte)

Eine Suspension von Bakterien (Keimen) wird auf 100 Petri-Schalen abgesetzt, pro Petri-Schale 0,02 ml. Die Keimzahl in der Suspension sei 1000/ml. Nach einer gewissen Zeit werden die Bakterienkolonien, von denen jede aus einem Keim entsteht, unter dem Mikroskop ausgezählt.

a) Wie groß ist die erwartete (durchschnittliche) Anzahl λ_0 von Bakterienkolonien pro Petri-Schale?

Im folgenden nehmen wir an, dass die Anzahl X von Bakterienkolonien pro Petri-Schale poissonverteilt ist mit einem Parameter, der λ genannt wird.

b) Für einen anderen Versuch braucht man Petri-Schalen, die genau eine Bakterienkolonie enthalten. Wie stark muss obengenannte Suspension verdünnt werden, damit die erwartete Anzahl solcher Schalen maximal ist? (Für welches λ ist die Wahrscheinlichkeit maximal, dass eine Schale genau eine Bakterienkolonie enthält?)
c) In einem anderen Fall möchte man die Suspension möglichst stark verdünnen, aber so, dass man erwarten kann, dass 90 der 100 Schalen mindestens eine Bakterienkolonie enthalten. Wie stark darf man maximal verdünnen? (Ab welchem λ ist die Wahrscheinlichkeit, für eine fest vorgegebene Petri-Schale keine Bakterienkolonie zu erhalten, $\leq 10\%$?)
d) Wie gross ist für $\lambda = 0{,}6$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht-leere Petri-Schale genau eine Bakterienkolonie enthält? (Salopp gefragt: Wieviele Prozent der Petri-Schalen, die mindestens eine Bakterienkolonie enthalten, werden genau eine enthalten? Hinweis: Dies ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit.)

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Die Zufallsvariable X habe folgende Dichte:

$$f(t) = \begin{cases} c(1-t^2) & \text{falls } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie $f(t)$ und bestimmen Sie die Konstante c so, dass f eine Dichte ist. (Hinweis: Die Fläche unter der Kurve muss 1 sein.)
b) Berechnen und skizzieren Sie die zugehörige (kumulative) Verteilungsfunktion $F(t)$.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert zwischen 0 und 0,5 annimmt, also $P[0 \leq X \leq 0{,}5]$. Zeichnen Sie diese Wahrscheinlichkeit in die Skizzen von a) und b) ein.
d) Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und den Median von X.

Aufgabe 34 (10 Punkte)

Die Inkubationszeit X (in Monaten) einer bestimmten ansteckenden Krankheit wird als *log-normal* verteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 0{,}6$ modelliert, d.h. man nimmt an, dass $\log X \sim \mathcal{N}(0; 0{,}6^2)$, wobei log der natürliche Logarithmus ist.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass die Inkubationszeit mehr als 3 Monate beträgt.
   HINWEIS: Der MATLAB-Befehl `normcdf(x)` berechnet $\Phi(\mathtt{x})$.
b) Berechnen Sie den Median med von X.
c) Für eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable Y gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} P[\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma] &\approx 68\% \qquad \text{und} \\ P[\mu - 1.96\sigma \leq Y \leq \mu + 1.96\sigma] &\approx 95\%. \end{aligned}$$

   Finden Sie Konstanten c_1 und c_2, so dass

$$\begin{aligned} P\left[\frac{\text{med}}{c_1} \leq X \leq \text{med} \cdot c_1\right] &\approx 68\% \qquad \text{und} \\ P\left[\frac{\text{med}}{c_2} \leq X \leq \text{med} \cdot c_2\right] &\approx 95\%. \end{aligned}$$