

Mathematik II für Biologen

Zusatzblatt (Abgabe ggf. am 3. oder 10.7.2009)

Aufgabe 35 (Abi 1986, Ba-Wü)

(20 Zusatzpunkte)

Beim Spielen mit einem Würfel stellte ein Spieler fest, dass die Augenzahl 1 überdurchschnittlich häufig, die Augenzahl 6 dagegen relativ selten auftrat. Dies führte zu der Vermutung, dass die Wahrscheinlichkeit, eine "1" zu würfeln, den Wert 0,2 hat, die Wahrscheinlichkeit für "6" dagegen 0,1 beträgt und dass die anderen Augenzahlen mit untereinander gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten.

- a) Die Vermutung treffe zu. Die Zufallsvariable X beschreibe die Augenzahl beim einmaligen Werfen des Würfels.
- (i) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.
 - (ii) Berechnen Sie den Erwartungswert von X .
 - (iii) Dieser Würfel wird sechsmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man
 A : Immer die gleiche Augenzahl
 B : Lauter verschiedene Augenzahlen
 C : Dreimal die "1" und dreimal die "6"?
- b) Die Wahrscheinlichkeit, eine "6" zu würfeln sei $p = 0,1$. Es wird 1000 mal gewürfelt und die Anzahl der auftretenden Sechsen festgestellt. Bestimmen Sie dafür den Erwartungswert μ . Bestimmen Sie ein möglichst kleines $k \in \mathbb{N}$, so dass die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% in das Intervall $[\mu - k, \mu + k]$ fällt.
- c) Die Vermutung, dass die "6" mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0,1$ auftritt wird bezweifelt und in einem zweiseitigen Test auf dem Signifikanzniveau 5% überprüft. Dazu wird der Würfel 2000 mal geworfen. Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, falls $p = \frac{1}{6}$ ist.
- d) Mit dem Würfel aus Teilaufgabe (a) wird von zwei Spielern F und G ein Glücksspiel nach den folgenden Regeln durchgeführt: Spieler F legt als Einsatz k DM ($k > 4$) auf den Tisch und würfelt zweimal. Für jeden der beiden Würfe gilt: Fällt eine "6", so muss Spieler G den auf dem Tisch liegenden Betrag durch Zuzahlen verdreifachen. Würfelt F eine "1", so nimmt G 2 DM vom Tisch. In den übrigen Fällen nimmt G 1 DM vom Tisch. Am Ende des Spiels nimmt F den noch auf dem Tisch liegenden Betrag.
Wie groß muss k sein, damit das Spiel fair ist?⁹

⁹"Fair" heißt hier, dass der erwartete Gewinn bzw. Verlust für beide Spieler gleich ist.