Mathematik II für Biologen

# Beschreibende Statistik
# Zweidimensionale (bivariate) Daten

Stefan Keppeler

8. Mai 2009

Eberhard Karls Universität Tübingen

## Zweidimensionale Stichproben

## Graphisch: Streudiagramm

- Lineare Regression
- Transformationen

## Numerisch: Korrelationen

- Produktmomenten-Korrelation
- Rangkorrelation
- Warnung

Stichprobe $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $\ldots$, $(x_n, y_n)$ von Paaren von Zahlen.
Oft:

- $x$: Ausgangsgröße, “unabhängige” Variable
- $y$: Zielgröße, Idee $y = f(x)$, “abhängige” Variable

**Beispiel 1:** Grille `(vgl. Mathematik I, Aufgabe 57)`

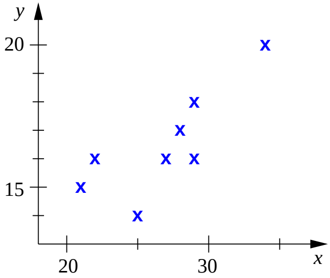
- $x_i$: Temperatur $[°\mathrm{C}]$
- $y_i$: Zirpfrequenz (Tonhöhe) $[1/\mathrm{s}]$

| $x_i$ | 21 | 22 | 25 | 27 | 28 | 29 | 29 | 34 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 15 | 16 | 14 | 16 | 17 | 16 | 18 | 20 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 21 | 22 | 25 | 27 | 28 | 29 | 29 | 34 |
| $y_i$ | 15 | 16 | 14 | 16 | 17 | 16 | 18 | 20 |

Beschreibungsmöglichkeiten

- Wende Methoden für eindimensionale Stichproben getrennt auf $x$ und $y$ an.
  **Nachteil:** Zusammenhang zwischen $x$ und $y$ geht verloren.
- Graphisch: Streudiagramm (scatter plot)



Falls Streudiagramm eine Gerade suggeriert: Lineare Regression
`(siehe Mathematik I, Vorlesung 14)`

$$y(x) = mx + b + \text{“kleiner Fehler”}$$

Wähle $m$ und $b$ so, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + b))^2$$

minimal. Ergebnis:

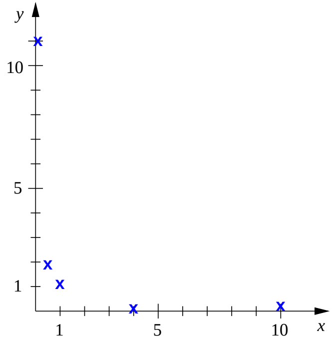
$$m = \frac{\sum(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum(x_i - \overline{x})^2}\,, \qquad b = \overline{y} - m\overline{x}$$

Manchmal erinnert das Streudiagramm erst nach Transformation(en) an eine Gerade,

$$x_i \mapsto g(x_i)\,, \qquad y_i \mapsto f(y_i)\,.$$

**Beispiel 2:** Andere Stichprobe

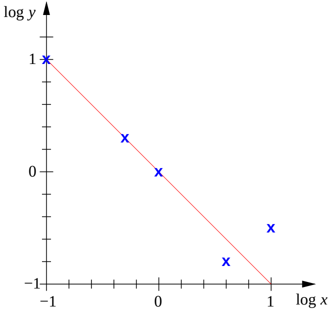
| $x_i$ | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 4,0 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 11 | 1,9 | 1,1 | 0,15 | 0,2 |




Sieht nicht nach Gerade aus...
Vielleicht Potenzgesetz?

| $x_i$ | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 4,0 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 11 | 1,9 | 1,1 | 0,15 | 0,2 |

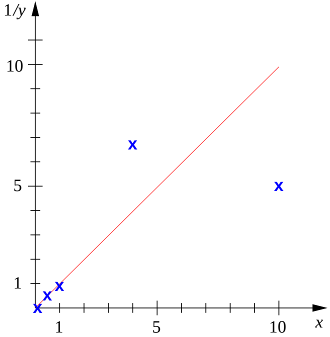
| $\log_{10} x_i$ | $-1{,}0$ | $-0{,}3$ | 0,0 | 0,6 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log_{10} y_i$ | 1,0 | 0,3 | 0,0 | $-0{,}8$ | $-0{,}7$ |




Ungefähr Gerade mit Steigung $-1$.
Also wäre auch $y_i \mapsto 1/y_i$ gut gewesen...

| $x_i$ | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 4,0 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 11 | 1,9 | 1,1 | 0,15 | 0,2 |

| $x_i$ | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 4,0 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $1/y_i$ | 0,1 | 0,5 | 0,9 | 6,7 | 5,0 |




Gerade mit Steigung 1?

Die Produktmomenten-Korrelation $r_{xy}$ nach Pearson
misst die Stärke eines linearen Zusammenhangs zwischen $x$ und $y$,

$$r_{xy} := \frac{s_{xy}}{s_x\, s_y}\,,$$

wobei:

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \qquad \text{Stichprobenkovarianz,}$$

$$s_x, s_y \qquad \text{Standardabweichungen.}$$

Für den Wert gilt immer: $-1 \le r_{xy} \le 1$, denn...

**Interpretation:** Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \big(x_1 - \overline{x}, \ldots, x_n - \overline{x}\big)\\ \vec{b} &= \big(y_1 - \overline{y}, \ldots, y_n - \overline{y}\big)\end{aligned}\,, \qquad r_{xy} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

Für den Wert gilt immer: $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

Je näher $|r_{xy}|$ bei $1$, desto stärker ist der lineare Zusammenhang zwischen $x$ und $y$.

| | |
|---|---|
| $\lvert r_{xy}\rvert = 1$ | perfekter linearer Zusammenhang |
| $r_{xy} \approx 0$ | kein linearer Zusammenhang |

Vorzeichen (VZ):
VZ von $r_{xy}$ $=$ VZ der Steigung $m$ der Regressionsgeraden

**Beispiele:**

- "Grille": $r_{xy} = 0{,}8$
- Beispiel 2: $r_{xy} = -0{,}5$
- weitere qualitativ...

Die Rangkorrelation nach Spearman misst die Stärke eines monotonen Zusammenhangs, zwischen $x$ und $y$,

$$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = r_{\mathrm{Rang}(x)\,\mathrm{Rang}(y)}$$

**In Beispiel 2:**

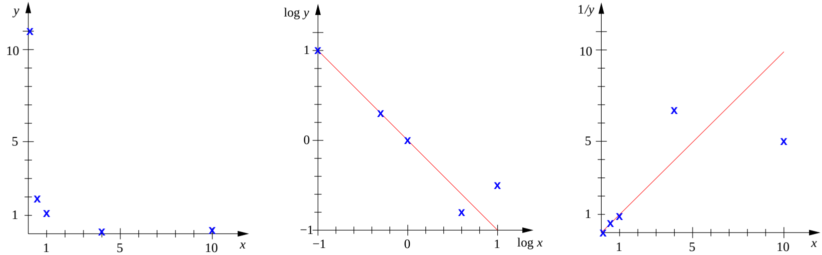
| $x_i$ | 0,1 | 0,5 | 1,0 | 4,0 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 11 | 1,9 | 1,1 | 0,15 | 0,2 |

| $\mathrm{Rang}\, x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{Rang}\, y_i$ | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 |

$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9$, aber $r_{xy} = -0{,}5$:

Monotoner Zusammenhang, aber nicht linear.

**Übrigens:** $r_{xy}^{(\mathrm{SP})}$ robust, $r_{xy}$ nicht.



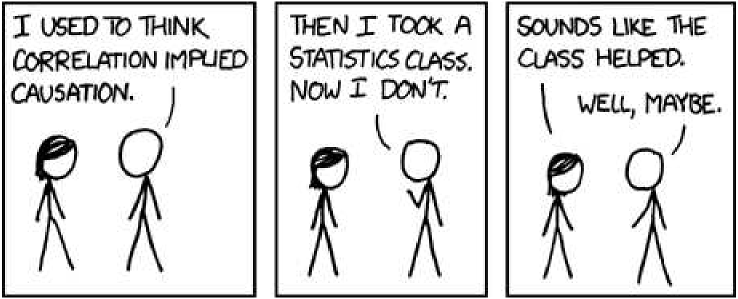

$$r_{xy} = -0{,}5 \qquad r_{xy} = -0{,}97 \qquad r_{xy} = 0{,}74$$

$$r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9 \qquad r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = -0{,}9 \qquad r_{xy}^{(\mathrm{SP})} = 0{,}9$$

$|r_{xy}^{(\mathrm{SP})}|$ ändert sich nicht bei monotoner Transformation.

**Vorsicht:** Interpretation von Korrelationen nicht einfach!

- $r$ (mit kleinem Betrag) kann rein zufällig von Null verschieden sein. Ob zufällig oder nicht: Schließende Statistik (später)
- Eine Korrelation $r \neq 0$ sagt nichts über einen ursächlichen Zusammenhang. Viele Möglichkeiten:
  - $x$ beeinflußt $y$.
  - $y$ beeinflußt $x$.
  - $x$ und $y$ haben eine gemeinsame Ursache $z$.
  - Schein-Korrelationen, z.B.: Seien $x$, $y$, $z$ unkorreliert. Dann sind $x/z$ und $y/z$ automatisch korreliert.
  - V.a. bei Zeitreihen: Unabhängige lineare Trends in $x$ und $y$ führen zu "Unsinns-Korrelationen". Beispiel:
    $x_i$ = # Störche im Jahr $1900 + i$
    $y_i$ = # Geburtenrate im Jahr $1900 + i$
    $r_{xy}$ deutlich von Null verschieden $\Rightarrow$ ???




http://xkcd.com/552