Mathematik II für Biologen

Schließende Statistik: Hypothesentests

Stefan Keppeler

15. Mai 2009

- **Beispiel:** Population von 1000 Individuen heißt "gesund", falls für die Anzahl k "kranker" Individuen gilt: $k \leq 80$.
- Annahme: Population ist gesund, d.h. $k \leq 80$, also schlimmstenfalls $k = 80$.

  Nullhypothese $H_0 : \; k = 80$
- Jemand behauptet: Die Population ist krank (d.h. $k > 80$).

  Alternativhypothese $H_A : \; k > 80$.
- Alle Individuen zu untersuchen ist zu teuer. Sie planen, $n = 10$ Individuen zu untersuchen.

$$
\begin{aligned}
X &= \#\{\text{Anzahl kranker Individuen unter den } n \text{ untersuchten}\} \\
&= \text{"Teststatistik"}
\end{aligned}
$$

X ist zufällig!

Ziel: Entscheide aufgrund von X, ob H_0 verworfen wird.

Annahme: H_0 stimmt. Welche Werte kann dann X annehmen?

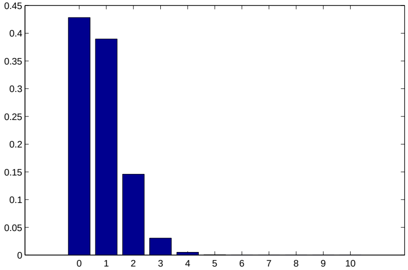
- Theoretisch: Alle Werte $X = 0, 1, 2, \ldots, 10$ sind möglich
- Praktisch: Einige Werte von X sind unwahrscheinlicher als andere; z.B. ist es "praktisch unmöglich", $X = 10$ zu beobachten.

Bestimme Verteilung der Teststatistik X

- mittels Simulation
  - nehme Urne mit 1000 Kugeln, 80 schwarze, 920 weiße
  - mische, ziehe $n = 10$ Kugeln $X = \#\{\text{scharze Kugeln}\}$
  - wiederhole oft, z.B. 10^6 mal
  - Histogramm für X-Werte
- mittels Wahrscheinlichkeitstheorie

Simulation der Teststatistik mit MATLAB

```
N=1000; % Größe der Urne
k=80;   % Anzahl schwarze Kugeln
X=[];
for wdh=1:10^4 % besser 10^5
  urne=[ones(1,k),zeros(1,N-k)];
  n=10; % Stichprobenumfang
  stichprobe=[];
  for j=1:n
    kugel=unidrnd(length(urne));
    stichprobe=[stichprobe,urne(kugel)];
    urne(kugel)=[];
  end;
  X=[X,sum(stichprobe)];
end
verteilung=hist(X,0:10)./wdh;
bar(0:10,verteilung)
```



X	0	1	2	3	4	5	$6-10$
#	4283	3896	1458	306	51	6	0

$\underbrace{X \in \{0,1,2,3\}}_{\approx 99{,}4\%}$ $\underbrace{X \in \{4,\dots,10\}}_{\approx 0{,}6\%}$

$\underbrace{X \in \{0,1,2\}}_{\approx 96{,}4\%}$ $\underbrace{X \in \{3,\dots,10\}}_{\approx 3{,}6\%}$

- Lege Signifikanzniveau α fest, z.B. $\alpha = 5\%$.
  (auch üblich: 10%, 1%, $0{,}1\%$ oder $0{,}01\%$)

- Erkläre diejenigen theoretisch möglichen Werte von X
  - die zusammen höchstens α ausmachen
  - und am stärksten für H_A sprechen,

  für "praktisch unmöglich" (falls H_0 gilt).

  Verwerfungsbereich $K = \{$"praktisch unmögliche" Werte$\}$

  Hier[1]: $K = \{3, 4, 5, \ldots, 10\}$ (für $\alpha = 5\%$).

[1] Bemerkung: $K^C = \{0, 1, 2\}$ heißt "Annahmebereich"

- **Erst jetzt:** Untersuche n Individuen, bestimme X,
  z.B. $X = 3$ beobachtet.

- Testentscheidung
  - Falls $X \in K$ beobachtet wird:
    H_0 wird verworfen zugunsten von H_A.
    Man sagt: *Es ist "statistisch bewiesen" auf* $\alpha = 5\%$, *dass* H_0 *nicht gelten kann.* Oder: H_0 *ist mit Beobachtung nicht vereinbar.*
  - Falls $X \notin K$ beobachtet wird:
    H_0 wird nicht verworfen.
    H_0 kann gelten, muss aber nicht. Daten und H_0 scheinen sich nicht zu widersprechen, aber "nichts bewiesen".

	Allgemein	im Beispiel
1	Nullhypothese H_0	$k = 80$
2	Alternativhypothese H_A	$k > 80$
3	Wähle Teststatistik X	$\#\left\{ \begin{array}{c} \text{kranke Individuen unter} \\ 10 \text{ zufällig gewählten} \end{array} \right\}$
4	Verteilung von X falls H_0 wahr	Simulation
5	Wähle Signifikanzniveau α	$\alpha = 5\%$
6	Verwerfungsbereich K (aus 4 & 5)	$K = \{3, 4, 5, \ldots, 10\}$
7	Bestimme X aus Daten	$X = 3$
8	Testentscheidung: $X \in K$ oder $X \notin K$?	$X \in K$: H_0 wird verworfen

Merke: Je kleiner α desto schwieriger wird es, H_0 zu verwerfen.

Beispiel: Hätten wir $\alpha = 1\%$ gewählt, so wäre $K = \{4, 5, \ldots, 10\}$ gewesen und damit $X = 3 \notin K$...