

# Mathematik II für Biologen

## Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stefan Keppeler

29. Mai 2009

Grundbegriffe: Ereignisse

Wahrscheinlichkeitsmaße: Kolmogorov Axiome

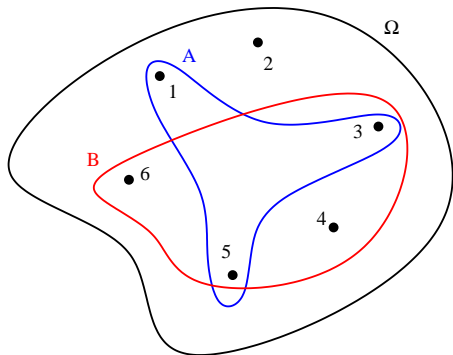
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Satz von Bayes

Beispiel: Diagnostischer Test

Beispiel: Gefangenenparadoxon

- ▶ **Elementarereignis**  $\omega$ : (nicht weiter zerlegbares) Ergebnis eines einzelnen Experiments
- ▶ **Ereignisraum**  $\Omega$ : Menge aller Elementarereignisse
- ▶ **Ereignis**  $A$ : Teilmenge von  $\Omega$




**Beispiel:** Würfel

$$\Omega = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square\}$$

$$A = \{\square, \square, \square\} \text{ (Ergebnis ungerade)}$$

$$B = \{\square, \square, \square, \square\} \text{ (Ergebnis } \geq 3)$$

- ▶ Menge aller Ereignisse  $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ :  
Potenzmenge (Menge aller Teilmengen) von  $\Omega$  



**Definition:** Eine Funktion  $P : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls gilt

(1)  $P[\Omega] = 1$

(2) Falls  $A_1, A_2, \dots$  disjunkt (d.h.  $A_j \cap A_k = \emptyset, \forall j \neq k$ ), so folgt

$$P \left[ \bigcup_{j \geq 1} A_j \right] = \sum_{j \geq 1} P[A_j],$$

insbesondere: Falls  $A, B$  disjunkt (d.h.  $A \cap B = \emptyset$ ), so folgt

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B].$$

### Beispiele:

- ▶ Laplace'scher Wahrscheinlichkeitsraum
- ▶ verschiedene Würfel



**Folgerungen:**

(i)  $P[A^C] = 1 - P[A]$

(ii)  $P[\emptyset] = 0$

(iii) Für beliebige  $A, B \subset \Omega$  gilt:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

**Beweis:****Beispiel:**

**Definition:** Seien  $A, B \subseteq \Omega$ ,  $P[B] \neq 0$ , so heißt

$$P[A|B] := \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$ .

**Beispiel:** 

**Definition:** Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen **unabhängig**, falls gilt

$$P[A \cap B] = P[A] P[B].$$

(D.h.  $P[A|B] = P[A]$  falls  $P[B] \neq 0$  und  
 $P[B|A] = P[B]$  falls  $P[A] \neq 0$ )

**Satz:** Seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$  disjunkt,  $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$  und

$B \subseteq \Omega$  mit  $P[B] \neq 0$  beliebig.

Dann gilt für jedes  $j = 1, \dots, n$


$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] P[A_j]}{\sum_{k=1}^n P[B|A_k] P[A_k]} .$$

**Beweis:** 

- ▶ Eine Krankheit tritt bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz)
- ▶ Test liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität)
- ▶ Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität)

	Test positiv $B$	Test negativ $B^C$
Person krank $A_1$	o.k.	falsch
Person gesund $A_2$	falsch	o.k.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?

$$P[A_1|B] = ?$$




- ▶ In einem Gefängnis sitzen drei zum Tode verurteilte Gefangene: Anton, Brigitte und Clemens.
- ▶ Genau einer von ihnen soll begnadigt werden. Dazu wird ein Los gezogen, das allen die gleiche Chance gibt, begnadigt zu werden.
- ▶ Anton, der also eine Überlebenswahrscheinlichkeit von  $\frac{1}{3}$  hat, bittet den Wärter, der das Ergebnis des Losentscheids kennt, ihm einen seiner Leidensgenossen, Brigitte oder Clemens, zu nennen, der oder die sterben muss.
- ▶ Der Wärter antwortet "Brigitte"

Wie hoch ist nun Antons Überlebenswahrscheinlichkeit?

