Bsp zu Potenzmenge:

$$\Omega = \{1, 2, 3\}$$

$\Sigma = \mathcal{P}(\Omega) =$ "Menge aller Teilmenge von Ω"

$$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \Omega\}$$

leere Menge, $\emptyset = \{\ \}$

$= \{1,2,3\}$

- Laplace'scher W-Raum:

W'keit für jedes Elementarereignis gleich groß

Ereignis $A \subseteq \Omega$

$$P[A] = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\text{Anzahl der Elemente in } A}{\text{Anzahl der Elemente in } \Omega}$$

$$= \frac{\text{"Anzahl günstiger Fälle"}}{\text{"Anzahl möglicher Fälle"}}$$

erfüllt (1) und (2)

- Würfel $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

  $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,4,5,6\}$

- Laplace-Würfel (fairer Würfel)

  $P[A] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P[B] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

- "unfairer Würfel"

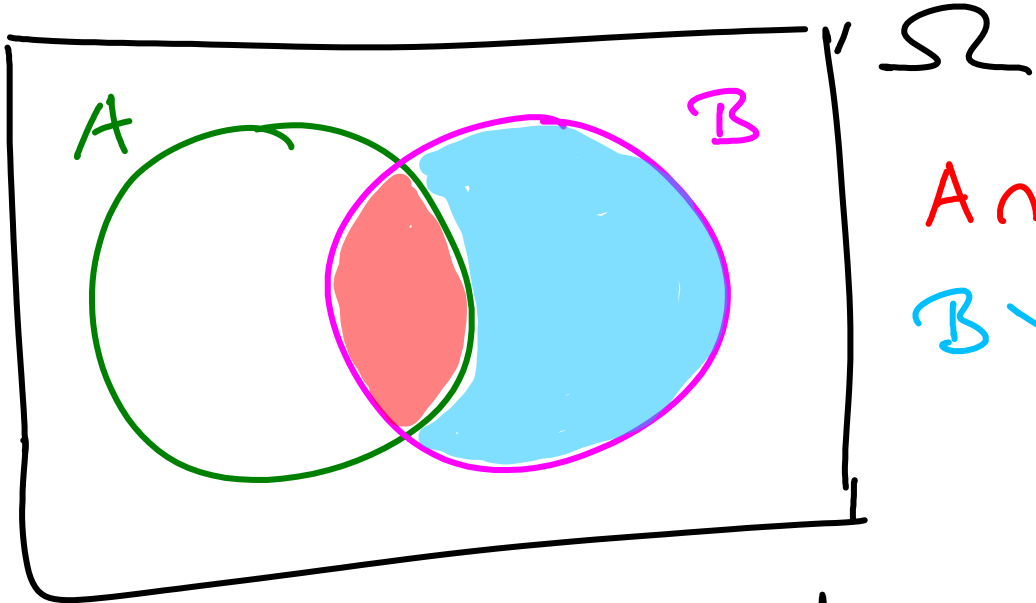
  $P[\{1\}] = \frac{1}{12}$, $P[\{6\}] = \frac{3}{12}$

  $P[\{j\}] = \frac{1}{6}$, $j = 2,3,4,5$

  erfüllt auch (1) und (2), aber kein Laplace'scher W-Raum

  $P[A] = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

  $P[B] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$



$A \cap B$

$B \setminus A$

$$B \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in B \text{ und } \omega \notin A\}$$
$$= B \cap A^c$$

Beweise für Folgerungen

(i) $P[A \cup A^c] = P[\Omega] \underset{(1)}{=} 1$

$$\underset{(2)}{=} P[A] + P[A^c]$$

$$\Rightarrow P[A^c] = 1 - P[A]$$

(ii) $P[\emptyset] \underset{(i)}{=} 1 - P[\Omega] \underset{(1)}{=} 0$

(iii) $P[A \cup B] = P[A \cup (B \setminus A)]$

$$\underset{(2)}{=} P[A] + \underbrace{P[B \setminus A] + P[A \cap B]} - P[A \cap B]$$

$$\underset{(2)}{=} P[A] + P[\underbrace{(B \setminus A) \cup (A \cap B)}_{B}] - P[A \cap B]$$

<u>Beispiele:</u> Würfel (für (iii))

$A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,4,5,6\}$

$P[A \cup B] = P[\{1,3,4,5,6\}]$

$= \frac{5}{6}$ für Laplace-Würfel

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$= P[\{1,3,5\}] + P[\{3,4,5,6\}] - P[\{3,5\}]$

$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

Bsp f. Bedingte W'keit (Würfel-Bsp. v. oben)

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[\{3,5\}]}{P[\{3,4,5,6\}]}$$

$$= \frac{2/6}{4/6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ Laplace-Würfel

$$P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} = \frac{P[\{3,5\}]}{P[\{1,3,5\}]}$$

$$= \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Beweis (Satz von Bayes)

$$P[A_j|B] = \frac{P[A_j \cap B]}{P[B]} \cdot \frac{P[A_j]}{P[A_j]}$$

$$= \frac{P[B|A_j]\,P[A_j]}{P[B]}$$

auch oft hilfreich

$$= \frac{P[B|A_j]\,P[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[B \cap A_k]}$$

$$= \frac{P[B|A_j]\,P[A_j]}{\sum_{k=1}^{n} P[B|A_k]\,P[A_k]} \quad \square$$

Beispiel: Diagnostischer Test

$P[A_1 | B] = ?$

$P[A_1] = 0{,}01$

$\Rightarrow P[A_2] = P[A_1^c] = 1 - P[A_1] = 0{,}99$

$P[B | A_1] = 0{,}98$

$P[B^c | A_2] = 0{,}95 \Rightarrow P[B | A_2] = 0{,}05$

$$P[A_1 | B] = \frac{P[B|A_1]\,P[A_1]}{P[B|A_1]\,P[A_1] + P[B|A_2]\,P[A_2]}$$

$$= \frac{0{,}98 \cdot 0{,}01}{0{,}98 \cdot 0{,}01 + 0{,}05 \cdot 0{,}99} = \frac{98}{98 + 495} \approx \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Wahrsch. dafür, dass Pers. krank ist, wenn Test positiv.

A_b : Anton wurde begnadigt

B_b : Brigitte ——— " ———

C_b : Clemens ——— " ———

B_g : Brigitte wurde genannt

C_g : Clemens ——— " ———

$P[A_b | B_g] = ?$

$P[A_b] = P[B_b] = P[C_b] = \frac{1}{3}$

$P[B_g | A_b] = \frac{1}{2} = P[C_g | A_b]$

$P[B_g | B_b] = 0 = P[C_g | C_b]$

$P[B_g | C_b] = 1 = P[C_g | B_b]$

$$P[A_b | B_g] = \frac{P[B_g | A_b]\, P[A_b]}{P[B_g]}$$

$$P[A_b \mid B_g] = \frac{P[B_g \mid A_b]\, P[A_b]}{P[B_g]}$$

$$= \frac{P[B_g \mid A_b]\, P[A_b]}{P[B_g \mid A_b]\, P[A_b] + P[B_g \mid B_b]\, P[B_b] + P[B_g \mid C_b]\, P[C_b]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3}$$

und damit $P[C_b \mid B_g] = \frac{2}{3}$