Fakultät

$n! := n(n-1)!\quad , \quad n \in \mathbb{N}$

$0! := 1$

$\Rightarrow \; 1! = 1 \cdot 0! = 1$

$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$

m. B. d. R., o. Z.

$$\underline{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1 \quad (i)$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n \qquad (ii)$$

$$\boxed{\binom{n}{k} := 0 \text{ falls } k > n}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (iii)$$

$$\Rightarrow \quad \binom{n}{n} = 1 \quad (\text{aus } (i) + (iii))$$

$$\binom{n}{n-1} = n \quad (\text{aus } (i) + (ii))$$

Herleitung der Binomialverteilung

zunächst Bsp:

$$P[++-+---++] = P[+]^5 \cdot P[-]^4$$

unabhängige Ereignisse

$$= p^5 \cdot (1-p)^4$$

$$P[X=k] = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Anordnung von k Erfolgen und n-k Misserfolgen auf n Positionen}} \underbrace{p^k (1-p)^{n-k}}_{\text{k Erfolge und n-k Misserfolge (s.o.)}}$$

Binomialtest: "Spermasexing"

① $H_0: p = 0{,}7$

② $H_A: p > 0{,}7$

③ $X = \#\,♀$ bei $n = 12$ Versuchen

④ Verteilung von X, falls H_0 gilt:

$$X \sim \mathrm{Bin}(\underset{n}{12}\,;\ \underset{p}{0{,}7})$$

⑤ Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

⑥ Verwerfungsbereich $K = ?$

mit $P_{H_0}[X \in K] \leq \alpha = 5\%$

$$P_{H_0}[X = 12] = \binom{12}{12}(0{,}7)^{12}(0{,}3)^{0} = (0{,}7)^{12} \approx 1{,}38\%$$

$$P_{H_0}[X = 11] = \binom{12}{11}(0{,}7)^{11}(0{,}3)^{1} \approx 6{,}53\%$$

$$\Longrightarrow \quad K = \{12\}$$

⑦ $X = 11$ (Test durchgeführt)

⑧ Entscheidung: H_0 wird nicht verworfen alternativ: mit p-Wert

(1) - (5) wie oben

(6) entfällt

(7) wie oben

(8) entfällt

(9) p-Wert: $P_{H_0}[X \geq 11] \approx 7{,}9\% = 0{,}079$

(10) Testentscheidung: p-Wert > $\alpha = 5\%$

also nicht verwerfen

Vorzeichentest

① H_0: Waage ist geeicht

② H_A: Waage ist nicht geeicht

③ Teststatistik $T = \#\{\text{Werte} < 20\}$

④ $T \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$

gehe gleich zum p-Wert

⑦ $T = 1$ beobachtet

⑨ p-Wert:

$$P_{H_0}[T \leq 1] + P_{H_0}[T \geq 9] = p\text{-Wert}$$

$$= \left[\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10}\right] \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= \frac{1 + 10 + 10 + 1}{1024} \approx 2\ \%$$

⑩ H_0 wird z.B. auf 5%-Niveau verworfen mit Faustregel von oben gilt

$$K^c = \left[\frac{n}{2} - \sqrt{n} \,,\, \frac{n}{2} + \sqrt{n}\right]$$

$$= \left[5 - \sqrt{10} \,,\, 5 + \sqrt{10}\right]$$

$$\approx [1{,}8 \,,\, 8{,}2] \not\ni 1 \text{, passt}$$

obwohl n nicht groß genug war

$$n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4} = 2{,}5 \not\ni 9$$