Erwartungswert für $X \sim Bin(n,p)$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=\cancel{0}\ 1}^{n} \underbrace{k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1}} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1,\ \text{Wahrsch. für } Bin(n-1,p)\text{-vert. Zufallsvariable}} = np$$

Linearität von $E[\cdot]$

$$E[aX+bY] = \sum_{k,\ell} (ak+b\ell)\, P[X=k \text{ und } Y=\ell]$$

$$= a \sum_{k,\ell} k\, P[\dots] + b \sum_{k,\ell} \ell\, P[\dots]$$

$$= a \sum_{k} k\, P[X=k] + b \sum_{\ell} \ell\, P[Y=\ell]$$

$$= a\, E[X] + b\, E[Y]$$

Varianz $Var(X)$

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

$$= E[X^2 - 2X E[X] + E[X]^2]$$

Linearität

$$= E[X^2] \underbrace{- 2 E[X] E[X]}_{= -2E[X]^2} + E[X]^2$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

Erwartungstreue

① Mittelwert $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$x_i \to X_i$

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität}}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gleich für alle } i}}{E[X_i]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X] = E[X]$$

② empirische Varianz, schreibe zunächst um

$$S_x = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\frac{x_i}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}_{=\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} x_j x_h}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\frac{x_i}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j + \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2}_{=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \underbrace{- \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}_{=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}}_{-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j x_k}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{\frac{x_i^2}{n}}_{\frac{x_i^2+x_j^2}{n}} - \frac{x_i x_j}{n}\right) = \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

jetzt $x_i \longrightarrow X_i$

$$E\left[\frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i-X_j)^2\right]$$

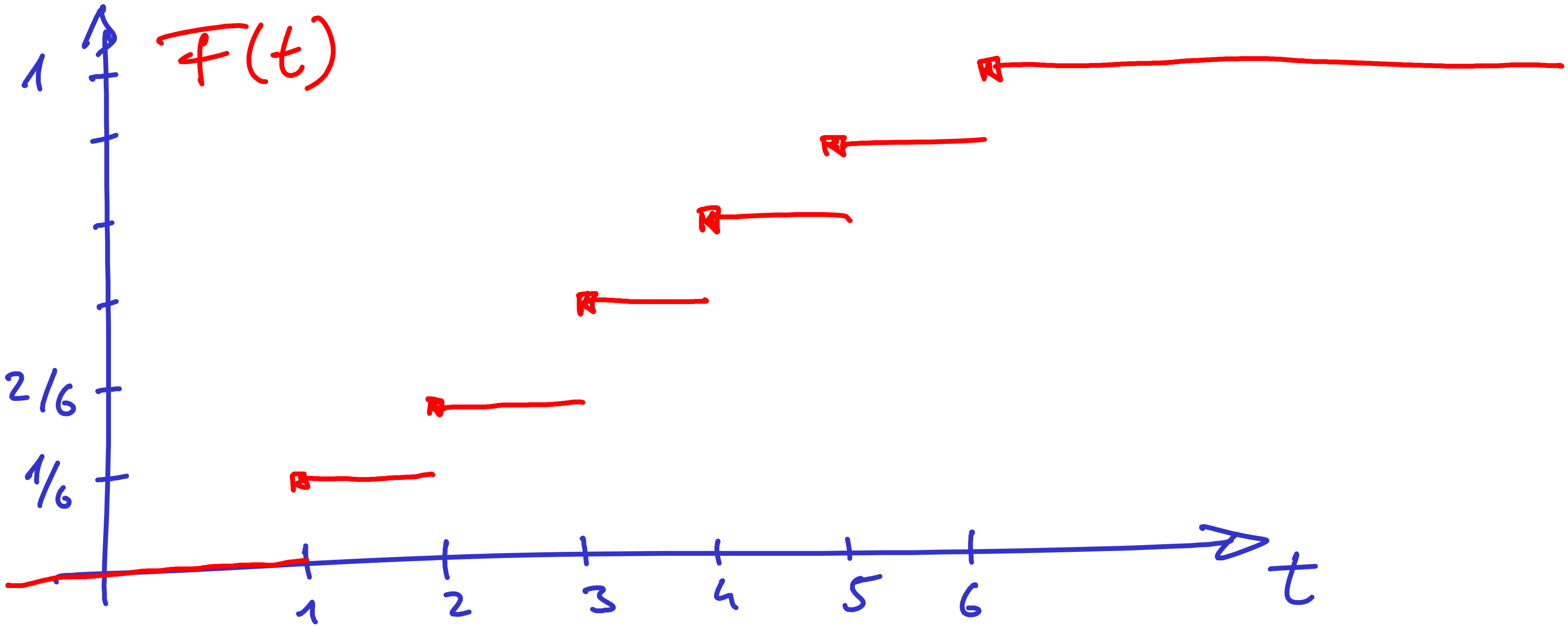
$$= \frac{1}{2n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\underbrace{E[X_i^2]}_{=E[X^2]} - \underbrace{2E[X_iX_j]} + \underbrace{E[X_j^2]}_{=E[X^2]}\Big)$$

$$= -2\begin{cases} E[X_i]E[X_j], & i \neq j \quad \text{weil unabhängig} \\ E[X_j^2], & i = j \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2n(n-1)}}\Big(\cancel{2n^2}\,E[X^2] - \underbrace{\cancel{2n}}_{\text{so oft ist } i=j}\,E[X^2] - \underbrace{\cancel{2(n^2-n)}}_{\text{so oft ist } i\neq j}\,E[X]^2\Big)$$

$$= E[X^2] - E[X]^2 = \mathrm{Var}(X)$$

Verteilungsfunktion fairer Würfel (1x geworfen)



wieder in Schüttelhausen:

(Warte-) Zeit zwischen zwei Beben

kann jeden Wert $t \in [0, \infty)$ annehmen

(pos. reelle Zahl)

stetige Zufallsvariable

Gesamtfläche unter Kurve $= 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt$

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(t)\,dt$$