$E(X_j) = \mu$, $Var(X_j) = \sigma^2$

$Y := X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

Parameter

$E[Y] = E[X_1 + \dots + X_n] = E[X_1] + \dots + E[X_n] = n\mu$

$Var(Y) = Var(X_1 + \dots + X_n) = Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = n\sigma^2$

$\uparrow$ X_j unabhängig

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} Y$$

$E[\overline{X}] = E[\frac{1}{n} Y] = \frac{1}{n} E[Y] = \mu$ (Erwartungstreue)

$Var(\overline{X}) = Var(\frac{1}{n} Y) = \frac{1}{n^2} Var(Y) = \frac{\sigma^2}{n}$

d.h. $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$

Standardabw.: $\sqrt{Var(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

z-Test

$H_0: \mu = \mu_0$

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad \overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$$

siehe oben: $E[\overline{X}] = \mu_0$ (unter H_0)

$$\operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

d.h. Z ist standardisierte ZV also $Z \sim N(0,1)$

Vertrauensintervall beim t-Test

$H_0 : \mu = \mu_0$ wird angenommen, falls

$$-t < \underbrace{\frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}}_{=T} < t \qquad \Big| \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$t_{df,\,1-\frac{\alpha}{2}}$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{ts}{\sqrt{n}} < \bar{X} - \mu_0 < \frac{ts}{\sqrt{n}} \qquad \Big| -\bar{X}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\bar{X} + \frac{ts}{\sqrt{n}}}} > \mu_0 > \underline{\underline{\bar{X} - \frac{ts}{\sqrt{n}}}} \qquad \Big| \cdot(-1)$$

Wilcoxon-Test

H_0: Der Median (der Verteilung der X_i) ist 20

Waage

med = 20

H_A: med $\neq$ 20

Begründung für erwartetes u^-

Summe aller Ränge: $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(n+1)n}{2}$

Bestimme VZ durch Münzwurf

→ Hälfte ⊕, Hälfte ⊖, unabhängig von VZ

also erwarte $u^+ \approx u^- \approx \frac{n(n+1)}{4}$