Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 09

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 9.7.2009)

Aufgabe 40 (10 Punkte)

Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ die Menge aller offenen Intervalle (a, b) aus $\mathbb{R}$ sowie
$\mathcal{M}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ aus $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Die erzeugten σ-Algebren sind gleich[3], d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$.

Aufgabe 41 (10 Punkte)

a) Nach dem Verpacken von sechs verschiedenen Geschenken kann Georg den Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) jeder die richtigen erhält?

b) Wir zeigen: Sind die Ereignisse A_j, $j = 1, \ldots, n$ paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)\, P(A_k) \quad \forall\, j \neq k$$

so folgt daraus **nicht** $P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_j)$.

Beispiel: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse
A_1 = "der erste Wurf liefert eine gerade Zahl",
A_2 = "der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl" und
A_3 = "die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade".
Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

[3] Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 42 (10 Punkte)
Eine Krankheit trete bei 2% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 97% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

> *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig ausgewählten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?*

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Geben Sie wie beim Gefangenenparadoxon aus der Vorlesung eine geeignete Ergebnismenge Ω an.

Bezeichnen Sie mit A_1 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit hat, mit A_2 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also $A_2 = A_1^C$) und mit B das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt.

b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.
c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Satzes von Bayes.
d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.

Aufgabe 43 (10 Punkte)
Sie würfeln einmal mit einem (fairen) zwanzigseitigen Würfel und bestimmen so den Wert der Zufallsvariablen X_1 (d.h. $X_1(\Omega) = \{1, 2, \ldots, 20\}$). Erhalten Sie beim ersten Wurf eine 1, so würfeln Sie nochmals mit demselben Würfel und bestimmen so den Wert von X_2. Für $2 \leq X_1 \leq 12$ würfeln Sie mit einem (fairen) sechsseitigen Würfel und bestimmen so den Wert von X_2. In allen anderen Fällen ($X_1 \geq 13$) würfeln Sie nicht noch einmal – der Wert von X_2 ist dann Null.

a) Sind X_1 und X_2 stochastisch unabhängig? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.
b) Berechnen Sie $P(X_2{=}4)$ und $P(X_2{\geq}3)$.